Einleitung

Sei G eine lokal-kompakte Gruppe und K eine kompakte Gruppe, die auf G durch Automorphismen wirkt. In der vorliegenden Arbeit geht es um unitäre Darstellungen von G, die unter der Wirkung von K invariant sind.
Solche unitären Darstellungen treten in [7] auf. In dieser Arbeit hat Bianca Di Blasio den Begriff des radialen Vektors eingeführt in Anlehnnung an den Begriff einer radialen Funktion, den Damek und Ricci in [6] verwendet haben unter Bezugnahme auf einen Mittelungsprojektor $R : \mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathcal{D}(G)$. Dabei heißt eine Funktion φ auf G radial, wenn $R\varphi = \varphi$ gilt. Für eine unitäre Darstellung π einer Gruppe G in einem Hilbertraum H wird der Vektor v radial genannt, falls die Koeffizientenfunktion: $g \longmapsto < \pi(g)v, v >$ radial auf G ist(Siehe [7], Def.2.1]). Ein Mittelungsprojektor R entsteht zum Beispiel durch Mittelung über die Wirkung von K auf G; d.h. für eine stetige Funktion φ mit kompaktem Träger auf G ist der durch $R\varphi(g) := \int_K \varphi(k.g)dk$ definierte Operator ein Mittelungsoperator.
In diesem Fall kann eine Wirkung von K auf den unitären Darstellungen definiert werden. Dies wird der Ausgangspunkt unserer Arbeit sein.
Besitzt nun eine Darstellung π von G einen zyklischen radialen Vektor, so ist sie $K-$invariant; d.h. die Darstellung $k.\pi$ mit $k.\pi(g) = \pi(k.g), g \in G$ ist äquivalent zu π für jedes $k \in K$.
Es stellt sich nun die Frage, ob eine $K-$invariante Darstellung stets einen $K-$radialen Vektor besitzt? Am Beispiel der Gruppe $SU(2)$, die auf sich selbst durch innere Automorphismen wirkt, werden wir sehen, daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist. Man kann jedoch immerhin zeigen, daß jede $K-$invariante Darstellung quasi-äquivalent zu einer Darstellung ist, die einen $K-$radialen Vektor besitzt.
Nichtsdestotrotz stellt sich die interessante Aufgabe, die $K-$invarianten Darstellungen zu beschreiben. Dazu benutzen wir die Theorie der direkten Integralzerlegung.
Die Wirkung von K auf G überträgt sich in eine Wirkung von K auf der Menge $\widehat{G}$ der Äquivalenzklassen irreduzibler unitärer Darstellungen von G.
Das Kernstück der Arbeit bilden nun die beiden folgenden Resultate, die freilich nur unter der zusätzlichen Annahme, daß die $K-$Bahnen in $\widehat{G}$ für die Hüllen-Kern-Topologie auf $\widehat{G}$ abgeschlossen sind, bewiesen werden können:
1. Die $K-$Bahnen in $\widehat{G}$ entsprechen in eineindeutiger Weise den $K-$irreduziblen Darstellungen von G.
2. Jede $K-$invariante Darstellung schreibt sich als direktes Integral $K-$irreduzibler Darstellungen. (Dabei heißt eine Darstellung $K-$irreduzibel, wenn sie keine echte $K-$invariante Teildarstellung besitzt.)

Das Ziel unserer Untersuchungen im Spezialfall einer nilpotenten einfach zusammenhängenden Lie Gruppe besteht darin, in Analogie zur Kirillov's Charakterformel für irreduzible Darstellungen eine Charakterformel für $K-$irreduzible Darstellungen anzugeben. Dabei stößt man auf die Schwierigkeit, daß im Gegensatz zu einer irreduziblen Darstellung ρ die Darstellungsoperatoren $\pi(\varphi), \varphi \in \mathcal{D}(G)$, einer $K-$irreduziblen Darstellung π nicht notwendig Spuroperatoren sind. Aus diesem Grunde müssen wir mit dem allgemeineren Begriff der natürlichen Spur auf der Links-von-Neumann-Algebra $\mathcal{U}$ einer Hilbert-Algebra arbeiten. Bei geeigneter Wahl dieser Hilbert-Algebra ist $\mathcal{U}$ nämlich isomorph zur von-Neumann-Algebra $\mathcal{U}_\pi$ der $K-$irreduziblen Darstellung π, so daß sich die natürliche Spur auf $\mathcal{U}$ zu einer Spur f_π auf $\mathcal{U}_\pi$ überträgt. Die Charakterformel lautet dann

$$f_\pi(\pi(\varphi)) = \int_{\widehat{G}} \text{Spur } \rho(\varphi) d\mu_\pi(\rho), \varphi \in \mathcal{D}(G),$$

wobei μ_π das $K-$invariante Wahrscheinlichkeitsmaß auf der zu π gehörigen $K-$Bahn in $\widehat{G}$ ist.

An dieser Stelle freuen wir uns Herrn Professor Dr. Rainer Felix für seine mutige, treue, und gründliche Betreuung danken zu dürfen.

Oktober 2010