1 Summen, Produkte und Binomialkoeffizienten

(1.1) Das Summenzeichen Häufig treten in der Mathematik Ausdrücke wie

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

auf, wobei man hier die Summe der ersten n Zahlen meint. Diese Schreibweise kann jedoch in komplizierten Fällen leicht zu Verwechslungen führen, falls etwa das Bildungsprinzip nicht unmittelbar ersichtlich ist. Ist mit

$$3 + 5 + 7 + \cdots + p\,, \quad p \text{ Primzahl}\,,$$

die Summe der ungeraden Zahlen von 3 bis p gemeint oder die Summe der Primzahlen ab 3 bis p? Daher führt man die Summationsschreibweise ein, deren Vorteile Eindeutigkeit und Kürze sind. Man definiert

$$\sum_{k=1}^{n} A(k) := A(1) + A(2) + A(3) + \cdots + A(n)\,,$$

wobei $A(k)$ ein von k abhängiger Ausdruck ist. Hierbei ist k der Summationsindex, der „von 1 bis n läuft“ (Sprechweise: Summe von 1 bis n über k).

(1.2) Beispiele

(a) $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

(c) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1$

(1.3) Das Produktzeichen Entsprechend definiert man das Produktzeichen

$$\prod_{k=1}^{m} A(k) = A(1)\cdot A(2)\cdot \ldots \cdot A(m).$$

(1.4) Beispiele

(a) $\prod_{k=1}^{n} k = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$

(b) $\prod_{k=1}^{n} k^2 = 1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot \ldots \cdot n^2$

(c) $\prod_{k=1}^{n} (2k-1) = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)$

(1.5) Anfangs- und Endwerte Summen müssen keineswegs immer bei 1 anfangen und bei n enden. Man kann beliebige Anfangs- und Endwerte wählen. So hat die Summe

$$\sum_{k=5}^{15} k = 5 + 6 + \ldots + 15$$

zum Beispiel den Anfangswert 5 und den Endwert 15. Entsprechendes gilt auch für Produkte.

(1.6) Indexverschiebung Für manche Rechnungen kann es hilfreich sein, bei einer Summe oder einem Produkt einen bestimmten Anfangs- bzw. Endwert zu haben. Dies kann man durch ein Verfahren erreichen, das man Indexverschiebung nennt. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} A(k) = A(0) + A(1) + \cdots + A(n) = \sum_{k=m}^{n+m} A(k-m).$$

(1.7) Beispiel

(a)
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &= 1 + 2 + \cdots + n = (1+m-m) + (2+m-m) + \cdots + (n+m-m) \\ &= \sum_{k=1+m}^{n+m} (k-m)\,. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &= 1 + 2 + \cdots + n = (1-m+m) + (2-m+m) + \cdots + (n-m+m) \\ &= \sum_{k=1-m}^{n-m} (k+m)\,. \end{aligned}$$

(c) $\sum_{k=3}^{8} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = \sum_{k=1}^{6} (k+2)^2$.

(1.8) Multiindizes Um Symbolfolgen wie $\sum\sum$ zu vermeiden, falls man einmal über zwei Variablen summieren möchte, definiert man

$$\sum_{i,k=0}^{n} A(k,i) := \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} A(k,i)\,.$$

Um anzudeuten, daß über alle Zahlen außer j summiert werden soll, schreibt man

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} A(k)\,.$$

(1.9) Beispiele

(a)
$$\begin{aligned} \sum_{j,k=2}^{4} (k-j)^2 &= \sum_{k=2}^{4} \left((k-2)^2 + (k-3)^2 + (k-4)^2\right) \\ &= 0^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 = 12\,. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2} \sum_{k=3}^{4} (k^2 - i) &= \sum_{i=0}^{2} (3^2 - i + 4^2 - i) \\ &= 3^2 + 4^2 + (3^2 - 1) + (4^2 - 1) + (3^2 - 2) + (4^2 - 2) = 69\,. \end{aligned}$$

(c) $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 3}}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 = 46$

(1.10) Binomialkoeffizienten Das Zeichen ! wird Fakultät genannt und durch

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

definiert. Es ist also zum Beispiel $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Man legt fest $0! := 1$. Damit definiert man sogenannte Binomialkoeffizienten durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für } n \geq k\,.$$

Auch wenn dies aus der Definition nicht unmittelbar ersichtlich ist, handelt es sich beim Binomialkoeffizienten immer um eine ganze Zahl.

(1.11) Eigenschaften von Binomialkoeffizienten Es gelten:

(1) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

(2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(3) $(x+y)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$. (Binomischer Lehrsatz)

(4) $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n}{0}$.

Einige dieser Eigenschaften werden auf Seite 81 bewiesen.

Übungsaufgaben

(1) Schreibe mit Hilfe des Summenzeichens.

(a) $x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{2n}$

(b) $a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_kx_k$

(c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$

(d) $1 + 0 + 1 + 4 + \cdots + (n-1)^2$

(e) $(a_1b_1 + a_1b_2 + \cdots + a_1b_{10}) + (a_2b_1 + \cdots + a_2b_{10}) + \cdots + (a_5b_1 + \cdots + a_5b_{10})$

(2) Schreibe folgende Ausdrücke aus.

(a) $\sum\limits_{j=3}^{2n+1}(j+1)$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{2k+1}{3k+1}$

(c) $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ij}$

(d) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij}y_{jk}$

(3) Berechne.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n}1$

(b) $\sum\limits_{i=1}^{5}\sum\limits_{j=1}^{i}j$

(c) $\prod\limits_{k=1}^{n}1$

(d) $\prod\limits_{i=1}^{4}\prod\limits_{j=1}^{i}j$

(4) Vereinfache folgende Summen.

(a) $\sum\limits_{i=2}^{n-1}(a_{i+1}-a_{i-1})$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{20}\frac{1}{n(n+1)}$

(5) Berechne oder vereinfache.

(a) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

(b) $\frac{(2n)!}{n!}$

(c) $(x+y)^4$

2 Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen

(2.1) Ungleichungen Beim Lösen von Ungleichungen können viele verschiedene Probleme auftreten. Die einfachste Form einer Ungleichung lautet:

$$ax - b > 0 \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}^+ .$$

Die Lösungsmenge $L = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{b}{a}\right\}$ läßt sich hier unmittelbar ablesen. Andere Ungleichungen erfordern es, zunächst nach der Variablen aufzulösen:

$$\begin{aligned}
& & \frac{x}{2} - \frac{2}{3} &> \frac{1}{2} + \frac{x}{9} \\
&\Leftrightarrow & 9x - 12 &> 9 + 2x \\
&\Leftrightarrow & 7x &> 21 \\
&\Leftrightarrow & x &> 3 \\
&\Rightarrow & L &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\} .
\end{aligned}$$

Nun kann es auch passieren, dass die Variable „wegfällt“, d.h. eine von der Variablen unabhängige Aussage entsteht.

$$\begin{aligned}
& & \frac{8}{9} + 6x &\geq 2\left(\frac{5}{6} + 3x\right) \\
&\Leftrightarrow & \frac{8}{9} &\geq \frac{5}{3} \\
&\Leftrightarrow & 8 &\geq 15 \\
&\Rightarrow & L &= \varnothing .
\end{aligned}$$

(2.2) Fallunterscheidungen Wie uns das Beispiel $-x > a \Leftrightarrow x < -a$ zeigt, vertauschen sich beim Multiplizieren (Dividieren) mit -1 und damit mit einer beliebigen negativen Zahl die Ungleichungszeichen. Man muß also stets aufpassen, ob man mit einer negativen Zahl multipliziert. Dies führt dazu, daß häufig Fallunterscheidungen notwendig sind. Zum Beispiel:

$$(2x - 3)(3x - 2) > (2x - 3)(5x - 4) \qquad (*)$$

Falls nun $2x - 3 > 0$ ist, d.h. $x > \frac{3}{2}$ gilt, ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned}
& & 3x - 2 &> 5x - 4 \\
&\Leftrightarrow & 2x &< 2 \\
&\Leftrightarrow & x &< 1 .
\end{aligned}$$

Da nicht gleichzeitig $x < 1$ und $x > \frac{3}{2}$ sein kann, ergibt sich für diesen Fall die Lösungsmenge $L_1 = \varnothing$. Falls $x < \frac{3}{2}$ gilt, ist obige Gleichung (*) äquivalent zu

$$\begin{aligned}
& & 3x - 2 &< 5x - 4 \\
&\Leftrightarrow & x &> 1 ,
\end{aligned}$$

und es ergibt sich für diesen Fall die Lösung $L_2 = \left]1, \frac{3}{2}\right[$, denn es muss sowohl $x > 1$ als auch $x < \frac{3}{2}$ erfüllt sein. Die Lösungsmenge L der Ungleichung (*) ergibt sich nun als Vereinigung der Lösungsmengen der einzelnen Fälle, also $L = L_1 \cup L_2 = \left]1, \frac{3}{2}\right[$.

(2.3) Beträge Unter dem Betrag einer reellen Zahl versteht man

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases} ,$$

also die Zahl x ohne ihr Vorzeichen. Aufgrund der Definition bieten sich beim Rechnen mit Beträgen ebenfalls Fallunterscheidungen an. Wir betrachten das Beispiel

$$\left|1 - \frac{x}{2}\right| = x + \frac{5}{2}\,.$$

Ist $x \leq 2$, so gilt

$$1 - \frac{x}{2} = x + \frac{5}{2}\,,$$

also $x = -1$. Da $-1 \leq 2$ ist, handelt es sich bei $x = -1$ um eine Lösung der Ausgangsleichung. Ist $x > 2$, so erhält man

$$\frac{x}{2} - 1 = x + \frac{5}{2},$$

also $x = -7$. Da nicht $-7 > 2$ ist, handelt es sich bei $x = -7$ um keine Lösung der Ausgangsgleichung. Analog wie im vorigen Absatz erhält man die Lösungsmenge der gesamten Gleichung als Vereinigung der Lösungsmengen der einzelnen Fälle, es ist also $L = \{-1\}$.

(2.4) Quadratische Ungleichungen Für die Bestimmung der Lösungen quadratischer Ungleichungen der Form $x^2 + ax + b > 0$ berechnet man zunächst die Nullstellen von $x^2 + ax + b$. Durch diese Nullstellen werden die übrigen reellen Zahlen in ein, zwei oder drei offene Intervalle aufgeteilt. Aus jedem der Intervalle nimmt man eine beliebige Zahl heraus und überprüft, ob sie die Ungleichung erfüllt oder nicht. Ist eine Zahl Lösung der Ungleichung, so ist auch ihr gesamtes Intervall in der Lösungsmenge enthalten. Ist eine Zahl nicht Lösung der Ungleichung, so ist auch ihr gesamtes Intervall nicht in der Lösungsmenge enthalten. Ob die Nullstellen selbst Lösung sind, hängt davon ab, ob in der Ungleichung Gleichheit zugelassen ist. Die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich als Vereinigung der jeweiligen Intervalle und eventuell der Nullstellen.

Bei Ungleichungen höherer Ordnung kann man analog vorgehen.

(2.5) Beispiel Wir berechnen die Lösungsmenge von $x^2 + 3x \geq -2x - 6$. Die Nullstellen von $x^2 + 5x + 6$ sind -2 und -3. Wir setzen nun aus jedem der drei Intervalle $]-\infty, -3[$, $]-3, -2[$ und $]-2, \infty[$ eine Zahl in die obige Ungleichung ein, zum Beispiel -4, $-\frac{5}{2}$ und 0. Wir stellen fest, dass -4 und 0 die Ungleichungen erfüllen, $-\frac{5}{2}$ sie aber nicht erfüllt. Folglich gehören die beiden Intervalle $]-\infty, -3[$ und $]-2, \infty[$ zur Lösungsmenge, $]-3, -2[$ aber nicht. Wegen „$\geq$“ gehören auch -2 und -3 zur Lösungsmenge. Es ist also $L =]-\infty, -3] \cup [-2, \infty[$.

(2.6) Systeme von Ungleichungen Die Lösungsmenge eines Systems von Ungleichungen ist der Durchschnitt der Lösungsmengen der einzelnen Ungleichungen. Wir betrachten das Beispiel

$$\begin{cases} x^2 - 5x < 0 \\ x^2 - 9 \leq 0 \,. \end{cases}$$

Mit Hilfe von Fallunterscheidungen erhält man $L_1 =]0, 5[$ als Lösungsmenge der ersten und $L_2 = [-3, 3]$ als Lösungsmenge der zweiten Ungleichung. Das System hat folglich die Lösungsmenge $L = L_1 \cap L_2 =]0, 3]$.