

Einleitung

Die Supraleitung ist eines der faszinierendsten Phänomene der Festkörperphysik. Das vollständige Verschwinden des elektrischen Gleichstromwiderstands ist sowohl aus physikalischer Sicht als auch für technische Anwendung von größter Bedeutung. Praktisch überall, wo hohe Stromstärken vorkommen, ist der Einsatz von supraleitenden Materialien attraktiv. Zwar tritt Supraleitung nur bei relativ niedrigen Temperaturen auf, doch lohnt es sich aus zwei Gründen trotzdem, sie auszunutzen. Erstens ist der Energieaufwand für die Kühlung oft gering im Vergleich zum Nutzen und zweitens findet man immer wieder neue Materialien, die bei höheren Temperaturen supraleitend werden.

Neben dem Verschwinden des elektrischen Widerstands besitzen Supraleiter jedoch weitere wichtige Eigenschaften, die die Anzahl anwendungsrelevanter supraleitender Materialien stark einschränken. Größen wie Sprungtemperatur, kritisches Magnetfeld aber auch Verarbeitung und Produktionskosten spielen dabei eine wichtige Rolle.

Man teilt die bekannten supraleitenden Materialien in zwei grobe Kategorien ein:

- (1) **Tieftemperatursupraleiter (TTSL)**: Die Sprungtemperatur liegt in der Größenordnung von höchstens einigen zehn Kelvin, zur Kühlung ist daher flüssiges Helium notwendig. Sie sind größtenteils von metallischer Natur.
- (2) **Hochtemperatursupraleiter (HTSL)**: Die Sprungtemperaturen reichen bis über einhundert Kelvin, wodurch mit flüssigem Stickstoff gekühlt werden kann. Es handelt sich in den meisten Fällen um keramische Materialien.

Beide Klassen besitzen spezifische Vor- und Nachteile, die bei den entsprechenden Anwendungen individuell ausgenutzt werden.

In dieser Arbeit wird hauptsächlich ein Material untersucht, das erst 2001 entdeckt wurde. Es handelt sich um Magnesiumdiborid (MgB_2). Mit einer Sprungtemperatur von knapp 40 K füllt es eine Lücke zwischen den beiden Klassen. Wegen der relativ hohen Sprungtemperatur und hoher kritischer Felder stellt es unter den metallischen Supraleitern das für Anwendungen am besten geeignete Material dar. Trotz einiger Vorteile der Hochtemperatursupraleiter sind wegen der einfachen Verarbeitung metallische Supraleiter im Anwendungsbereich immer noch sehr weit verbreitet. Die wichtigsten Einsatzbereiche von MgB_2 sind:

- Starkstromkabel, mit denen mehrere Kiloampere pro Quadratmeter transportiert werden können
- Elektromagneten zum Beispiel für Kernspintomographie
- Kurzschlussstrombegrenzer

Darüber hinaus gibt es Anwendungen, für die dünne supraleitende Schichten benötigt werden. Es handelt sich um Sensoren für sehr kleine Magnetfelder, Detektoren für Terahertz-Wellen oder Frequenzfilter. In den meisten Fällen werden dafür filigrane Strukturen benötigt. Beispielsweise erfordern die für Sensoren benötigten Josephson-Kontakte (Josephson 1962) Strukturgrößen von einigen Mikrometern um die Bildung von sogenannten Josephson-Flusslinien zu vermeiden.

Die erreichbaren Stromdichten sind in dünnen Schichten etwa um das zehnfache höher als in ausgedehnten Materialien (Buzea und Yamashita 2001). Die Verbindung aus hoher Stromdichte und filigranen Strukturen führt zu einem der größten Probleme für die Anwendung von Supraleitern; dieses wird im Folgenden beschrieben.

Hohe Stromdichten können nur in einem sogenannten „kritischen Zustand“ erreicht werden. Dieser zeichnet sich vor allem dadurch

aus, dass magnetische Flusslinien im supraleitenden Material gut verankert werden können. Dabei handelt es sich jedoch um einen metastabilen Zustand. Das heißt, durch thermische Anregung lösen sich Flusslinien aus ihrer Verankerung und ordnen sich neu an. Da die erreichbare Stromdichte in Supraleitern mit sinkender Temperatur ansteigt, ist für Starkstromanwendungen eine niedrige Temperatur wünschenswert. Insbesondere in Metallen sinken die thermische Leitfähigkeit und die Wärmekapazität sehr stark mit fallender Temperatur. Diese Größen sind von entscheidender Bedeutung für die Stabilität des kritischen Zustands und begünstigen die Kettenreaktionen bei tiefen Temperaturen. Dabei können dramatische Kettenreaktionen entstehen, die den gesamten supraleitenden Zustand zerstören und in ausgedehnten Materialien sogar mechanische Schäden erzeugen können.

In dünnen Schichten sind Flusslinien nur auf einer wesentlich kürzeren Länge verankert und das magnetische Feldprofil weist eine deutlich andere Form auf als in ausgedehnten Proben. Bei sehr tiefen Temperaturen tritt daher eine besondere Form einer Instabilität auf: Bei einer Veränderung des äußeren Feldes oder eines Transportstroms kann es vorkommen, dass sich sprunghaft einige Millionen Flusslinien umordnen. Dadurch sinkt die stromtragende Fläche erheblich und es entsteht starkes Rauschen in Sensoranwendungen. Der supraleitende Zustand wird dabei jedoch nie großflächig zerstört. Dieses Phänomen wird als magnetische Flusslawine bezeichnet. Aufgrund der oben beschriebenen Temperaturabhängigkeit der thermischen Eigenschaften findet man in jedem Material eine universelle Temperatur T_L , unterhalb welcher generell Flusslawinen auftreten können. Wird dann ein externes Magnetfeld angelegt, kommt es oberhalb eines kritischen Feldes H_{gr} zur Entstehung von Flusslawinen.

Die Nukleationspunkte dieser Flusslawinen sind immer Unregelmäßigkeiten in der Mikrostruktur. Daher sind für Anwendungen absolut homogene und defektfreie Schichten ideal. Die Vermeidung von Unregelmäßigkeiten ist jedoch in der Praxis aus zwei Gründen schwer

zu realisieren. Erstens können leicht zufällige Materialdefekte entstehen, zum Beispiel durch Herstellungstoleranzen oder Alterung. Zweitens werden beispielsweise für Magnetfeldsensoren oder Terahertz-Bolometer Strukturen im Mikrometerbereich benötigt und es entstehen gezielt geometrische Inhomogenitäten.

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, einen Zusammenhang zwischen Inhomogenitäten in der Mikrostruktur und dem Auftreten von magnetischen Flusslawinen in MgB_2 Schichten herzustellen. Als Modellsystem für Schichten mit kleinen Defekten oder künstlicher Strukturierung dienen in dieser Arbeit Proben, die gleichzeitig zwei verschiedene Mikrostrukturen aufweisen: Erstens eine relativ homogene und defektarme Mikrostruktur und zweitens eine inhomogene Struktur, die viele Bereiche mit reduzierter Stromtragefähigkeit aufweist. Anhand dieser Proben wird das generelle mikrostrukturabhängige Verhalten von magnetischen Flusslawinen untersucht. Das Material MgB_2 dient hier als Repräsentant für metallische Supraleiter, die im wesentlichen das gleiche Verhalten zeigen. Die spezifischen Vorteile von MgB_2 sind die hohe Sprungtemperatur T_c sowie die hohe Lawinentemperatur T_L , wodurch die Untersuchungen bei höheren Temperaturen durchgeführt werden können.

In vielen Fällen wird ein in Oslo[†] entwickeltes theoretisches Modell für die Beschreibung von Flusslawinen herangezogen. Die Parameter, die die Mikrostruktur der Probe charakterisieren und für die Stabilität verantwortlich sind, werden qualitativ und teilweise quantitativ untersucht. Schließlich werden Erweiterungen für das bestehende Modell vorgeschlagen.

Die Untersuchungen des supraleitenden Zustands in MgB_2 Dünnschichten werden in erster Linie magnetooptisch durchgeführt. Unter Ausnutzung des Faraday-Effekts kann mit einem Polarisationsmikroskop die Verteilung der magnetischen Flussdichte in einer su-

[†]Rakhmanov u. a. (2004); Shantsev u. a. (2005); Denisov u. a. (2006a, b)

praleitenden Probe räumlich aufgelöst abgebildet werden. Aus den erhaltenen Daten können präzise quantitative Informationen gewonnen werden. Diese können dafür verwendet werden, um mit einem speziellen, komplexen Verfahren die Stromdichteverteilung zu berechnen. Die Temperatur und das externe Magnetfeld können dabei – in gewissen Grenzen – variiert werden. Zur Ergänzung dieser Methode dient die Messung des integralen magnetischen Moments der Probe. Dieses kann mit kommerziellen Magnetometern auf äußerst präzise Art und Weise durchgeführt werden. Die Temperatur und das externe Feld können in sehr weiten Bereichen variiert werden. Ortsaufgelöste Messungen sind jedoch nicht möglich. Eine weitere Ergänzung stellt die Messung des elektrischen Widerstands der Probe dar. Hierfür dampft man Kontakte auf die Probe auf und bestimmt über eine Vier-Punkt-Messung den Widerstand in Abhängigkeit der Temperatur und des externen Feldes.

1 Supraleitung

Das völlige Verschwinden des elektrischen Widerstands bei sehr tiefen Temperaturen war gleichermaßen unerwartet wie spektakulär. Darüber hinaus gibt es zahlreiche weitere spezifische Eigenschaften der Supraleitung wie zum Beispiel die Verdrängung von magnetischem Fluss oder die scharf begrenzte Menge an transportierbarem Strom. Auch wenn der Mehrheit der Bevölkerung die Eigenschaft der Supraleitung unbekannt ist, haben metallische Supraleiter längst ihren Platz in den Anwendungen gefunden. Zum Beispiel die Erzeugung hoher Magnetfelder und somit der Betrieb von Teilchenbeschleunigern wäre ohne Supraleiter undenkbar. Als 1986 supraleitende Keramiken mit sehr hohen Sprungtemperaturen entdeckt wurden, hat sich ein neues Feld von Anwendungen eröffnet, das viele Möglichkeiten bietet. In Zukunft wird voraussichtlich ein Großteil aller Starkstromanwendungen, wie zum Beispiel große Elektromotoren und Generatoren, Supraleiter als Stromleiter enthalten.

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die theoretischen Grundlagen der Supraleitung, die ausführlich in historischer Reihenfolge beschrieben werden. Das Material MgB_2 ist für diese Arbeit von großer Bedeutung und wird daher besonders beleuchtet.

1.1 Entdeckung

Am 8. April 1911 schrieb der Niederländer Heike Kamerlingh Onnes in sein Notizbuch, dass der elektrische Widerstand von Quecksilber bei 3 K praktisch null ist.

Er hatte seit 1894 mit flüssigen Gasen immer tiefere Temperaturen erreicht und konnte ab dem 10. Juli 1908 Helium verflüssigen. Abbil-

1 Supraleitung

Abbildung 1.1:

Originalmesskurve aus der Veröffentlichung von Kammerlingh Onnes (1911). Sie zeigt den elektrischen Widerstand einer Quecksilberprobe über der Temperatur. Bei 4.2 K verschwindet der Widerstand sprunghaft.

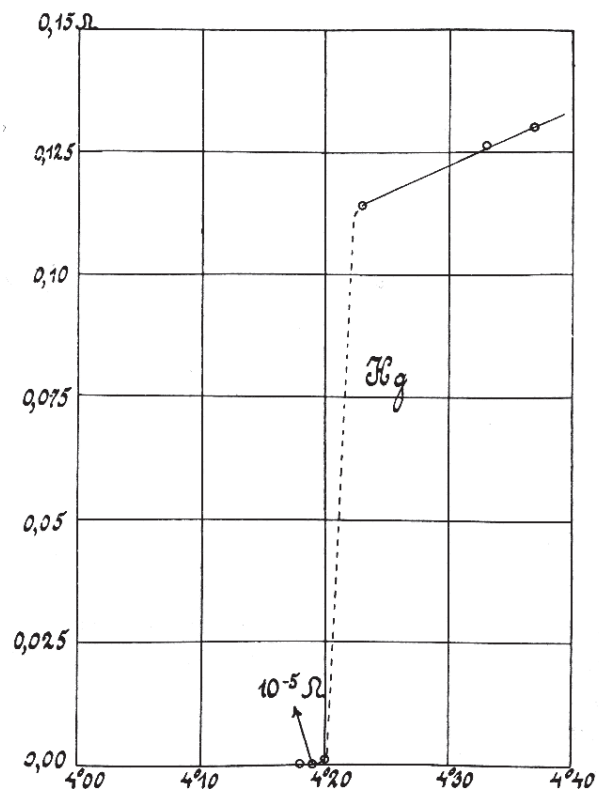


Abbildung 1.1 zeigt die Originalmesskurve des Widerstands von Quecksilber aus welcher hervorgeht, dass dieses unterhalb von 4.2 K widerstandslos ist (Kammerlingh Onnes 1911). Kammerlingh Onnes untersuchte die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands bei vielen weiteren Materialien und entdeckte die Supraleitung auch in Blei und Zinn. Schon damals wurde über mögliche Anwendungen diskutiert. Kammerlingh Onnes wollte zum Beispiel starke Magnete aus supraleitenden Materialien bauen, musste jedoch feststellen, dass die maximale Stromstärke nicht besonders hoch war und deswegen keinen Vorteil gegenüber klassischen Leitern bot. Belastete man nämlich die Supraleiter mit einer zu großen Stromdichte, so brach die Supraleitung zusammen. Es sollte 25 Jahre dauern, bis der russische Physiker Lew Wassiljewitsch Schubnikow die Supraleiter zweiter Art entdeckte, in denen signifikant höhere Ströme fließen können. Für die Herstellung von flüssigem Helium erhielt Kammerlingh Onnes 1913 den Nobelpreis für Physik.

1.2 Erste phänomenologische Beschreibungen

1.2 Erste phänomenologische Beschreibungen

Meissner und Ochsenfeld (1933) formulierten eine phänomenologische Beschreibung des supraleitenden Zustands und zogen aus ihren Experimenten folgende Schlussfolgerungen (wörtlich zitiert von Kronmüller (1994)):

- Supraleitung ist von metallischer Leitung mit unendlich hoher Leitfähigkeit verschieden.
- Der supraleitende Zustand ist auch ein magnetisches Phänomen (idealer Diamagnetismus bei kleinen Feldern).
- Der supraleitende Zustand ist thermodynamisch wohl definiert, da er von der Vorgeschichte unabhängig ist. Er kann deswegen mit Hilfe der Gleichgewichtsthermodynamik beschrieben werden.

Dabei handelt es sich um die wichtigsten und bedeutendsten Eigenschaften von Supraleitern. Der Meißner - Ochsenfeld - Effekt lässt sich folgendermaßen anschaulich erklären. Legt man von außen an einen Supraleiter ein Magnetfeld an, kann es diesen nicht durchdringen und wird sozusagen abgestoßen. Selbst wenn der Supraleiter im Feld unter seine kritische Temperatur gekühlt wird, wird das Magnetfeld aus seinem Inneren verdrängt (vergleiche Abbildung 1.2). Da dies ein reversibler Prozess ist, der nicht von der Vorgeschichte abhängt, handelt es sich beim supraleitenden Zustand um einen wohl definierten, thermodynamischen Zustand.

Becker u. a. (1933) wiesen darauf hin, dass – im Falle eines verschwindenden Widerstands – Elektronen in einem elektrischen Feld kontinuierlich beschleunigt werden. Die Bewegungsgleichung lautet also

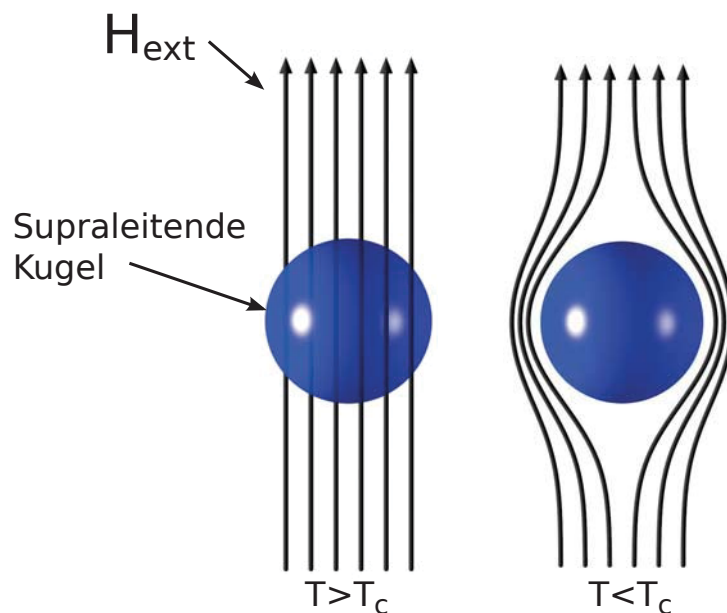
$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E}. \quad (1.1)$$

Hierbei ist m die Masse und e die Ladung eines Elektrons, \mathbf{E} ist das elektrische Feld. Als erste Konsequenz muss daher das elektrische Feld im Inneren des Supraleiters verschwinden, da sonst die

1 Supraleitung

Abbildung 1.2:

Veranschaulichung des Meißner - Ochsensfeld - Effekts anhand einer supraleitenden Kugel. Unterhalb von T_c wird das externe Magnetfeld aus dem Inneren des Supraleiters verdrängt, unabhängig davon, ob zuerst gekühlt oder zuerst das Magnetfeld angelegt wird.



Ladungsträger immer schneller werden würden. Die Stromdichte ist gegeben durch

$$\mathbf{j} = nev, \quad (1.2)$$

wobei n die Ladungsträgerdichte ist. Man erhält daraus und aus Gleichung (1.1):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Lambda \mathbf{j}) = \mathbf{E}, \quad (1.3)$$

mit $\Lambda = m/ne^2$. Diese Gleichung wurde von London und London (1935a, b) zuerst abgeleitet und wird daher **(erste) Londongleichung** genannt. Da diese Gleichung eine ideale Leitfähigkeit beschreibt, ersetzt sie im Falle der Supraleitung das Ohmsche Gesetz (Ohm 1827). Setzt man das Induktionsgesetz von Faraday (1832) $\text{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ in Gleichung (1.3) ein, so erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot}(\Lambda \mathbf{j}) + \mathbf{B}) = 0. \quad (1.4)$$

Da diese Gleichung für alle Zeiten gelten soll und laut Meißner und Ochsensfeld das Innere des Supraleiters feldfrei sein muss, muss auch

$$\text{rot}(\Lambda \mathbf{j}) = -\mathbf{B} \quad (1.5)$$

1.2 Erste phänomenologische Beschreibungen

gelten. Dies ist die **zweite Londongleichung** und beschreibt den idealen Diamagnetismus. Die Elektrodynamik im Supraleiter kann jetzt mit den Gleichungen von Maxwell (1865) und den beiden Londongleichungen als Materialgesetze beschreiben werden. Im eindimensionalen Spezialfall kann man die Ortsabhängigkeit des Magnetfeldes berechnen und findet, dass dieses an einer Vakuum-Supraleitergrenze nicht sofort verschwindet, sondern exponentiell abfällt. Man findet:

$$B(x) = B_a e^{-x/\lambda}, \quad (1.6)$$

wobei B_a das Feld am Rand des Supraleiters, x die Ortskoordinate und λ die sogenannte **London'sche Eindringtiefe** ist. λ ist die charakteristische Länge, auf der sich das Magnetfeld in einem Supraleiter ändern kann. Die London'sche Eindringtiefe ist stark material- und temperaturabhängig und liegt bei $T = 0\text{ K}$ in der Größenordnung von 10-100 nm.

Im Inneren des Supraleiters gilt $B = 0$ (Meißner und Ochsenfeld) und $E = 0$ (London). Ein Stromfluss kann nur zustande kommen, wenn die Ladungsträger beschleunigt werden können. Da der Widerstand eines Supraleiters null ist, kann auch keine Spannung abfallen und das elektrische Feld kann nicht zur Beschleunigung dienen. Entsprechend der zweiten Londongleichung führt auch ein Magnetfeld zu einem Stromfluss. Das heißt es kann dort, wo das Magnetfeld nicht verschwindet, ein Strom fließen. Da im Inneren $B = 0$ gilt, bleibt also nur eine Supraleiter - Vakuumgrenze als Bereich übrig, in dem ein Strom fließen kann, weil dort sowohl supraleitende Ladungsträger als auch ein Magnetfeld vorliegen können. Wird ein Magnetfeld an einen Supraleiter angelegt, so kommt es zu einem Stromfluss am äußersten Rand, dessen Betrag mit wachsendem Feld ansteigt. Als Maß für die integrale Stromdichte wird oft das magnetische Moment m verwendet ($m \propto \int j(x, y) d^2r$). Die Abhängigkeit des magnetischen Moments m vom externen Feld H ist in Abbildung 1.3 (links) dargestellt. Wird das externe Magnetfeld über einen kritischen Wert H_c erhöht, bricht die Supraleitung im gesamten Volumen zusammen.

1 Supraleitung

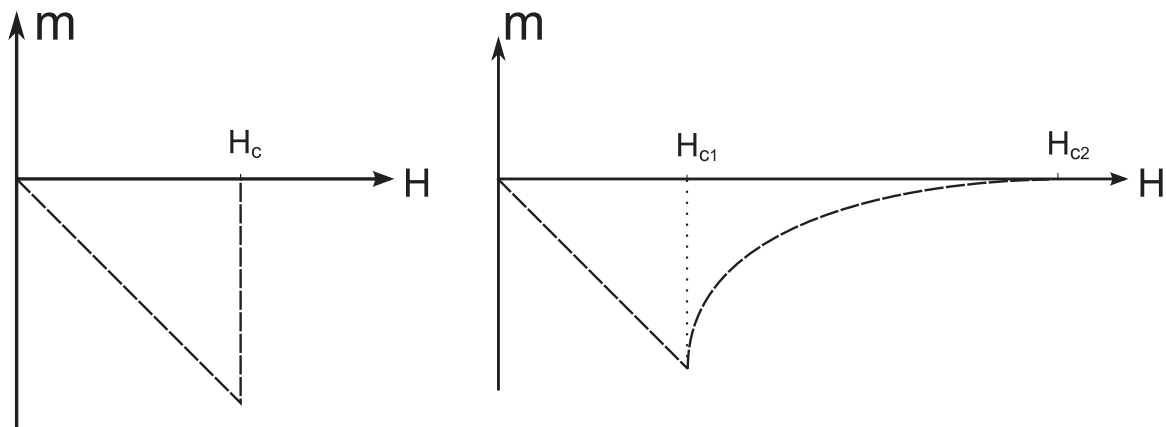


Abbildung 1.3:

Magnetisierungskurve von Supraleitern (a) erster Art und (b) zweiter Art. Im Supraleiter erster Art gibt es nur ein Grenzfeld, oberhalb dessen keine Supraleitung vorliegen kann. Der Supraleiter zweiter Art besitzt mehrere Grenzfelder, Details sind im Text erläutert.

Dieses Verhalten tritt genaunommen nur bei einem unendlich langen Zylinder auf. Liegen andere Geometrien vor, hängt das lokale Feld H_{lok} von den Koordinaten ab und es gibt Bereiche, wo $H_{\text{lok}} > H_c$ vorherrscht, und andere, bei denen H_{lok} noch kleiner ist als H_c . Dadurch spaltet sich der Supraleiter in normalleitende und supraleitende Gebiete auf, man spricht vom *Zwischenzustand*. Die Magnetisierungskurve weicht in diesem Fall leicht von Abbildung 1.3 (links) ab. Das heißt, das Maximum kann bereits vor H_c auftreten, wird jedoch H_{ext} größer als H_c , ist die Magnetisierung auf jeden Fall null.

Es wurden allerdings in den Jahren bis 1938 immer wieder Materialien entdeckt, die von diesem Verhalten abweichen. Erstens waren diese noch bei Magnetfeldern supraleitend, die deutlich höher waren als die bis dahin bekannten und zweitens wurde eine Hysterese in den Magnetisierungskurven beobachtet.

1.3 Supraleitung zweiter Art

1.3 Supraleitung zweiter Art

Schubnikow u. a. (1936a, b, 1937) lieferten eine Erklärung zu den oben genannten Abweichungen und führten eine neue Klasse von Supraleitern ein: die **Supraleiter zweiter Art**. Die bisher bekannten Materialien wurden entsprechend Supraleiter erster Art genannt. Supraleiter zweiter Art besitzen ein erstes kritisches Feld H_{c1} , oberhalb dessen magnetischer Fluss in Form quantisierter Flusslinien in den Supraleiter eindringen kann. Man nennt diesen Zustand *Schubnikow Phase*. Fließen nur die Oberflächenströme bei $H_{\text{ext}} < H_{c1}$ spricht man von der *Meißner Phase*. Oberhalb eines zweiten kritischen Feldes H_{c2} bricht die Volumensupraleitung zusammen, es existiert nur noch eine Oberflächensupraleitung. Erhöht man das äußere Feld weiter, so erreicht man ein weiteres kritisches Feld H_{c3} , oberhalb dessen dann gar keine Supraleitung mehr existieren kann. Die Magnetisierungskurve eines Supraleiters zweiter Art entspricht Abbildung 1.3 (rechts).

Interessanterweise sind alle bekannten Supraleiter erster Art Elemente. Und andersherum sind praktisch alle supraleitenden Elemente von der ersten Art und haben eher geringe Sprungtemperaturen (Blei hat mit 7.2 K die Höchste). Ausnahmen bilden nur Niob (Nb), Technetium (Tc) und Vanadium (V), wobei deren Sprungtemperaturen ebenfalls alle unter 10 K liegen. Das heißt, Supraleiter zweiter Art sind so gut wie immer Verbindungen und daher auch in wesentlich größerer Zahl vorhanden. Aufgrund der Möglichkeit eines sehr hohen Stromflusses sind nur Supraleiter zweiter Art für Anwendungen von Bedeutung. Die technologisch wichtigsten Materialien sind neben elementarem Niob die Niobverbindungen Nb_3Sn ($T_c = 18 \text{ K}$), Nb_3Ge ($T_c = 23 \text{ K}$) und NbTi ($T_c = 10 \text{ K}$). Seit die Hochtemperatursupraleiter großtechnisch hergestellt werden können, bilden sie eine weitere Gruppe technologisch bedeutender Supraleiter. Die wichtigsten Vertreter sind Yttrium - Barium - Kupferoxid (YBCO) und Bismut - Strontium - Calcium - Kupferoxid (BSCCO). Sie besitzen Sprungtemperaturen von knapp unter beziehungsweise etwas über einhundert

1 Supraleitung

Kelvin. Eine Angabe über den Supraleiter mit der höchsten Sprungtemperatur ist nicht sinnvoll, da laufend Verbindungen mit sehr hohen Sprungtemperaturen entdeckt werden. Dazu kommt, dass neue Ergebnisse oft nicht bestätigt sind und somit noch als unklar gelten.

1.4 Die Theorie von Ginsburg und Landau*

Ginsburg und Landau (1950) formulierten eine thermodynamische Theorie der Supraleitung unter Benutzung der Landau - Theorie der Phasenübergänge (Landau 1937). Typisch für die Beschreibung von Phasenübergängen ist die Einführung eines Parameters, der die Ordnung des System beschreibt, man nennt ihn daher Ordnungsparameter. Zur Beschreibung des Normalleiter - Supraleiter Übergangs verwendet man zunächst das Paar - Potenzial Δ als Ordnungsparameter. Oberhalb der kritischen Temperatur T_c ist $\Delta = 0$. Die Ordnung des Phasenübergangs ergibt sich aus der Unstetigkeit der Ableitung des zugehörigen thermodynamischen Potentials. Ist die erste Ableitung am Phasenübergang unstetig, so spricht man von einem Phasenübergang erster Ordnung. Im Falle des Normalleiter - Supraleiter - Übergangs ist das zugehörige thermodynamische Potential die freie Energie, da diese von der Temperatur, dem Volumen und der Teilchenzahl abhängt. Bei diesem Phasenübergang tritt erst in der zweiten Ableitung eine Unstetigkeit auf, es handelt sich daher um einen Phasenübergang zweiter Ordnung. In der Nähe von T_c findet man für die freie Energiedichte F im allgemeinen Falle eines nicht verschwindenden Magnetfelds mit Vektorpotential \mathbf{A} (de Gennes 1966):

$$F_s = F_n + A|\Delta|^2 + \frac{B}{2}|\Delta|^4 + C \left| \left(-i\nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{\hbar c} \right) \Delta \right|^2 + \frac{B^2}{8\pi}. \quad (1.7)$$

Die Indices n und s stehen für normalleitend bzw. supraleitend, A , B und C sind noch zu bestimmende Konstanten und c ist die Lichtge-

*In diesem Abschnitt wird das Gauß'sche CGS-Einheitensystem verwendet.

1.4 Die Theorie von Ginsburg und Landau

schwindigkeit. Der Term $\frac{H^2}{8\pi}$ beschreibt die magnetische Feldenergie im Vakuum. Wegen der formalen Analogie von Gleichung (1.7) mit der Beschreibung der Energiedichte eines Teilchens der Ladung $2e$, welche über die Größe Ψ erfolgt, identifiziert man:

$$\Psi = \frac{\sqrt{2mC}}{\hbar} \Delta, \quad \alpha = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{A}{C}, \quad \beta = \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^2 \frac{B}{C^2} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha^2}{2\beta} = \frac{H_c^2}{8\pi}, \quad (1.8)$$

und erhält damit die von Ginsburg und Landau (1950) angegebene Form:

$$F_s = F_n + \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{c} \right) \Psi \right|^2 + \frac{B^2}{8\pi}. \quad (1.9)$$

Es lohnt sich, hier einen Kommentar von Pierre-Gilles de Gennes wörtlich wiederzugeben[†]:

„This is the free energy form proposed by Landau and Ginsburg in 1951 well before the development of the microscopic theory. At that time, the physical significance of Ψ was far from being clear [...]. This construction of (the equation) independent of any detailed theory of the superconducting state represented a tour de force of physical intuition“

Die freie Energie \mathcal{F} des ganzen Volumens V des Supraleiters erhält man durch Integration:

$$\mathcal{F} = \int_V F d\mathbf{r}. \quad (1.10)$$

Die Minimierung der freien Energie bezüglich Ψ und \mathbf{A} führt schließlich zu den **Ginsburg - Landau Gleichungen**:

$$\alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi + \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{c} \right)^2 \Psi = 0 \quad (1.11a)$$

$$\mathbf{j} = \frac{e\hbar}{im} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{4e^2}{mc} \Psi^* \Psi \mathbf{A}. \quad (1.11b)$$

[†]Aus de Gennes (1966), Seite 175/176 in der dritten Auflage von 1999.

1 Supraleitung

Die erste Gleichung (1.11a) beschreibt den Ordnungsparameter Ψ . Das Betragsquadrat $|\Psi|^2$ kann mit der Dichte der supraleitenden Ladungsträger identifiziert werden. Gleichung (1.11b) gibt die Dichte des supraleitenden Stroms an. Aus den Gleichungen (1.11) lässt sich eine weitere charakteristische Größe zur Beschreibung des supraleitenden Zustands ableiten:

$$\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m|\alpha|}}. \quad (1.12)$$

ξ wird als Kohärenzlänge bezeichnet und gibt an, auf welcher Längenskala sich die Dichte der supraleitenden Ladungsträger ändern kann. ξ ergänzt damit die London'sche Eindringtiefe λ , die angibt, auf welcher Längenskala sich das Magnetfeld im Supraleiter ändern kann. Zusammen beschreiben λ und ξ das wesentliche Verhalten eines supraleitenden Materials. Man kann beide zusammenfassen zu

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi}, \quad (1.13)$$

und erhält den sogenannten **Ginsburg-Landau Parameter**, der die supraleitende Materialien in zwei Klassen einteilt. Ist $\kappa < 1/\sqrt{2}$, so handelt es sich um einen *Supraleiter erster Art*, anderenfalls um einen *Supraleiter zweiter Art* ($\kappa > 1/\sqrt{2}$).

1.5 Mikroskopische Vielteilchentheorie

Auch wenn die Ginsburg-Landau Theorie schon ein weitreichendes Verständnis für die Supraleitung lieferte, gab es noch einige Punkte, die nicht erklärt werden konnten. Zum Beispiel kann der Wert der Sprungtemperatur nicht bestimmt werden und auch die verlustfreie Stromleitung bleibt (mit dieser Theorie bis heute) unerklärt. Die Entdeckung des Isotopeneffekts von Maxwell (1950) und Reynolds u. a. (1950) bestätigte die Vermutung von Fröhlich (1950), dass die Supraleitung im Zusammenhang mit einer Elektronen-Phononen

1.5 Mikroskopische Vielteilchentheorie

Kopplung stehen muss. Die Sprungtemperatur verringert sich – wie die Messungen zeigten – wenn die Isotopenmasse abnimmt. Bardeen u. a. (1957) formulierten auf diese Idee aufbauend eine mikroskopische Theorie der Supraleitung, die nach den Anfangsbuchstaben der drei Autoren **B**ardeen, **C**ooper und **S**chriefer BCS - Theorie genannt wird. Die Grundidee dieser Theorie besteht darin, dass eine attraktive Wechselwirkung zwischen Elektronen im Festkörper möglich ist und sich zwei Elektronen in diesem Fall zu einem einzigen quantenmechanischen Teilchen zusammenschließen können. Diese attraktive Wechselwirkung kommt durch die Kopplung der Elektronen an die Phononen des Gitters zustande. Anschaulich kann man sich vorstellen, dass ein erstes Elektron das Gitter leicht deformiert und ein Phonon induziert bzw. beeinflusst. Ein zweites Elektron spürt dann diese Veränderung des Gitters und wird somit indirekt vom ersten Elektron angezogen. Die Reichweite dieser Wechselwirkung muss deutlich höher sein als die Coulombwechselwirkung, da diese abstoßend wirkt. Sind nun zwei Elektronen über ein sogenanntes virtuelles Phonon gekoppelt, addieren sich die beiden halbzahligen Spins zu einem Ganzzahligen und das entstandene Teilchen ist ein Boson. Die Existenz dieser Teilchen wurde erstmals von Cooper (1956) beschrieben. Sie heißen daher *Cooper Paare*. Da Bosonen nicht dem Pauli-Prinzip (Pauli 1925) genügen müssen, können sie bei hinreichend tiefen Temperaturen alle in den selben Grundzustand kondensieren und eine gemeinsame Wellenfunktion bilden. Durch diese Kondensation bildet sich um die Fermienergie eine Energielücke der Größe der doppelten Bindungsenergie Δ der Cooper - Paare. Es stehen damit keine freien Zustände zur Verfügung, in die ein Cooper Paar gestreut werden könnte und es resultiert ein verlustfreier Stromtransport. Das geschieht aber nur, wenn die Stromdichte einen Grenzwert nicht überschreitet. Anderenfalls wird die Energie bei einem Streuprozess so hoch, dass die Energielücke übersprungen werden kann und es entsteht wieder ein elektrischer Widerstand.

Der Anteil an Leitungs - Elektronen, der in den Grundzustand kondensiert, ist temperaturabhängig; am Nullpunkt sind alle Lei-

1 Supraleitung

tungs - Elektronen supraleitend. Daraus ergibt sich eine Temperaturabhängigkeit der Energielücke und somit auch der maximalen Stromdichte. Um diese sogenannte Paarbrechungsstromdichte zu berechnen, muss man zunächst davon ausgehen, dass die supraleitenden Elektronen nicht mehr einzeln betrachtet werden können, da sie eine gemeinsame, makroskopische Wellenfunktion bilden. Aus der BCS-Theorie ergibt sich die Anregungsenergie dieses Kondensats durch:

$$E(\xi_k) = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}, \quad (1.14)$$

wobei ξ_k die Energie des Quasiteilchens beschreibt. Die minimale Anregungsenergie erhält man für $E(\xi_k = 0) = \Delta$. Daraus kann die Paarbrechungsstromdichte bestimmt werden zu:

$$j_{\text{pb}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{\Phi_0}{\pi \mu_0 \xi \lambda^2}. \quad (1.15)$$

Setzt man typische Werte für MgB_2 ein, erhält man am Temperaturnullpunkt $j_{\text{pb}} \approx 4 \cdot 10^{12} \text{ A/m}^2$.