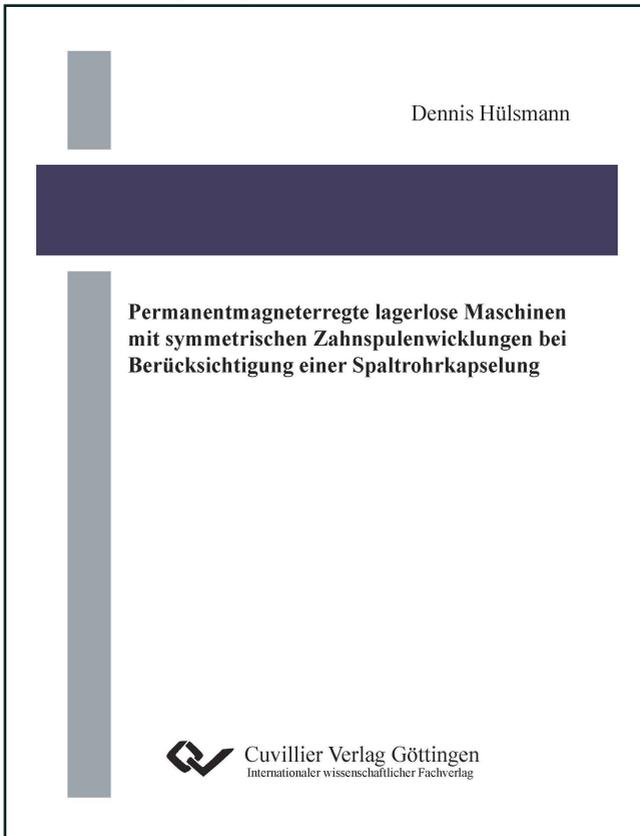




Dennis Hülsmann (Autor)

Permanentmagneterregte lagerlose Maschinen mit symmetrischen Zahnspulenwicklungen bei Berücksichtigung einer Spaltrohrkapselung



<https://cuvillier.de/de/shop/publications/6167>

Copyright:

Cuvillier Verlag, Inhaberin Annette Jentsch-Cuvillier, Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen,
Germany

Telefon: +49 (0)551 54724-0, E-Mail: info@cuvillier.de, Website: <https://cuvillier.de>

1 Einleitung

Die aktive magnetische Lagerung von Rotoren elektrischer Maschinen lässt sich in zahlreichen Anwendungsgebieten der elektrischen Antriebstechnik vorteilhaft einsetzen. So werden beispielsweise bei sehr schnell drehenden Antrieben, wie Spindelmotoren oder Zentrifugen, anstelle von konventionellen mechanischen Lagern Magnetlager verwendet, da die anfallenden Lagerungsverluste in diesem Fall deutlich geringer ausfallen. Auch aufgrund des Fehlens von Schmierstoffen und Abrieb bietet die kontaktfreie Lagerung interessante Anwendungsmöglichkeiten in der Vakuumtechnik oder der sterilen Prozesstechnik an [1].

In diesem Zusammenhang sind besonders die sogenannten *lagerlosen Maschinen* (oder auch *Querkraftmaschinen*) hervorzuheben, die im Gegensatz zu klassischen Magnetlagern einen Großteil des magnetischen Antriebsflusses aktiv zur Lagerung des Rotors nutzen. Die Zusammenführung von Antriebsmaschine und Lagerung erfolgt meist über eine Zusatzwicklung im Maschinenstator, so dass eine erhöhte Systemintegration und damit eine kompaktere Bauweise erzielt werden kann (siehe Abbildung 1.1). Dem gegenüber steht in der Regel ein erhöhter leistungselektronischer Aufwand – es ist jeweils ein Umrichter für die Antriebs- und Lagerwicklung notwendig – und eine im Vergleich zur klassischen Magnetlagertechnik komplexere Modellstruktur und Reglersynthese. Zusammen mit den meist erhöhten Investitionskosten wird deutlich, dass Lösungen mit lagerlosen Maschinen

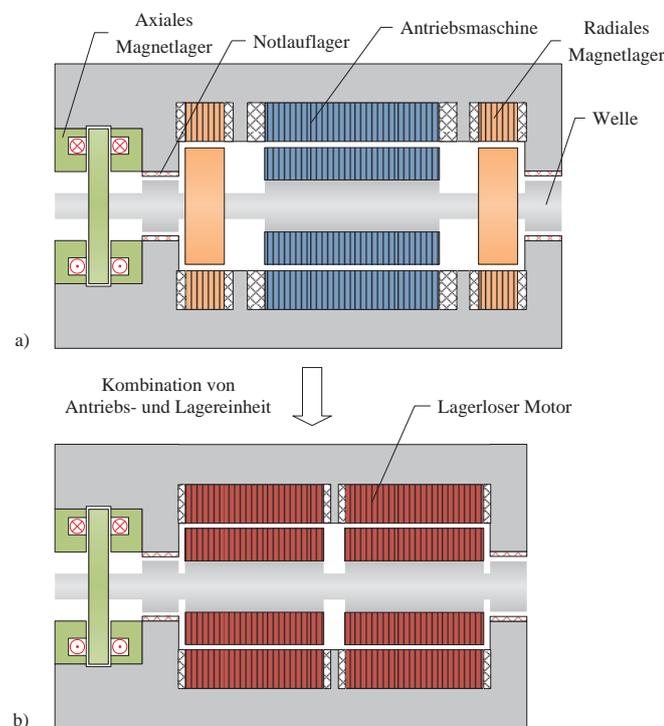


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung des Prinzips der lagerlosen Maschine, a) Konventionelle Magnetlagertechnik, b) Zusammenführung von Antriebs- und radialer Lagereinheit

eher in hochspezialisierten Nischenanwendungen zum Tragen kommen. Das Funktionsprinzip der lagerlosen Maschinen ist seit den siebziger Jahren des letzten Jahrhunderts Gegenstand der Forschung und lässt sich mit verschiedenen Maschinentypen, wie etwa Asynchron-, Synchron- oder Reluktanzmaschinen, realisieren. Die Kombinationsmöglichkeiten von Antriebs- und Lagerwicklung unterliegen dabei bestimmten Gesetzmäßigkeiten, die im Bereich der symmetrischen Strangwicklungen nur im Falle der verteilten Ganzlochwicklungen hinreichend genau bekannt sind. Für eine Lösung mit Zahnspulenwicklungen (Einzelzahnwicklungen) hingegen existieren in diesem Zusammenhang nur wenig allgemeingültige Aussagen, die insbesondere den Auswahl- und Auslegungsprozess einer lagerlosen Maschine entscheidend beeinflussen.

Bei bestimmten Anwendungen aus dem Bereich der Pumpentechnologie wird zudem eine *Kapselung* bestimmter Maschinenkomponenten verlangt. Bezogen auf das zu pumpende Fluid hat diese eine gewisse Schutzfunktion, die eine Kontamination des Fluids verhindern soll. In den meisten Fällen kommen dünnwandige Hohlzylinder (Spaltrohre) aus Edelstahl zum Einsatz, die aufgrund ihrer relativ guten elektrischen Leitfähigkeit eine zum Teil erhebliche Wirbelstrom-Verlustleistung im aktiven Maschinenteil nach sich ziehen.

Diese Arbeit greift die oben angesprochenen Themen – lagerlose Maschinen, symmetrische Zahnspulenwicklungen und Wirbelstrom-Spaltrohrverluste – im Rahmen einer Vorstudie aus dem Bereich der aseptischen Pumpen auf. Die besonderen Randbedingungen dieses in Kapitel 6 vorgestellten Konzeptes erlauben eine Betrachtung all dieser Themen in einer einzigen Anwendung. Die einzelnen Kapitel dieser Arbeit sind jedoch so gestaltet, dass sie einer weitestgehend anwendungsunabhängigen Betrachtung der einzelnen Sachverhalte gerecht werden, da beispielsweise eine Systematik für symmetrische Zahnspulenwicklungen, wie sie in Kapitel 4 vorgestellt wird, nicht nur im Bereich der lagerlosen Maschinen sinnvoll eingesetzt werden kann, sondern als durchaus eigenständiger Teil anzusehen ist. Ähnlich verhält es sich mit den Betrachtungen zur lagerlosen Maschine allgemein (Kapitel 2) und den Aussagen bezüglich bestimmter Kombinationsmöglichkeiten von Antriebs- und Lagerwicklung (Kapitel 5). Auch das in Kapitel 3 präsentierte analytische Modell zur Berechnung der Wirbelstrom-Spaltrohrverluste ist im weitesten Sinne von den beiden anderen Schwerpunktsthemen unabhängig.

Aufgrund der besonderen Bedeutung von permanentmagneterregten Maschinen auf dem Gebiet der lagerlosen Maschinen und insbesondere im Bereich der symmetrischen Zahnspulenwicklungen werden in dieser Arbeit ausschließlich Synchronmaschinen mit Permanentmagneterregung betrachtet.

2 Über die Entstehung von Querkräften

Dieses Kapitel geht zunächst auf die allgemeine Kräftesituation aufgrund vorhandener elektrischer und/oder magnetischer Felder (\vec{E} , \vec{H}) innerhalb eines beliebigen Körpers ein. Im Anschluss daran wird diese Formulierung auf den rotierenden Teil einer Maschine angewandt und im Sinne einer analytisch geschlossenen Kraftgleichung erweitert. Den Ausgangspunkt für die elektromagnetische Kraftbeschreibung stellen die beiden Erhaltungssätze der Elektrodynamik dar, der *Energieerhaltungssatz* in Form des Poynting-Theorems, sowie der *Impulserhaltungssatz*. Beide Sätze lassen sich unter Zuhilfenahme der geeigneten Maxwell-Gleichungen aus der *Lorentz-Kraftdichte* \vec{f} , mit

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}, \quad (2.1)$$

ableiten (siehe hierzu beispielsweise [2], [3]). Die felderregenden Größen (Stromdichteverteilung \vec{J} und Raumladungsdichteverteilung ρ) können im Folgenden durch Feldterme im Sinne von \vec{E} - und \vec{B} -Feldern ersetzt werden, so dass sich die Gl. (2.1) auf die Form

$$f_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} - \epsilon \mu \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} \right)_i \quad (2.2)$$

bringen lässt. Der Tensor T_{ij} in der Gl. (2.2) ermöglicht eine sehr kompakte Schreibweise der Terme der Vektoranalysis – im Wesentlichen sind es die Terme, die Divergenz- und Rotationsoperatoren enthalten – und wird als *Maxwellscher Spannungstensor* bezeichnet. Grundsätzlich handelt es sich hierbei um einen kartesischen Tensor 2. Stufe. Entsprechend der üblichen Konventionen der Tensoralgebra bezeichnen die Indizes i und j einen Zeilen- bzw. Spaltenindex [4]. Die Gl. (2.2) ist nun so zu interpretieren, dass jede Komponente f_i der Kraftdichte gemäß der *Einsteinschen Summationskonvention* berechnet werden kann. Folglich stellt der erste Term in Gl. (2.2) die Divergenz des Spannungstensors dar, die sich mittels des *Gaußschen Integralsatzes* vorteilhaft für die Berechnung der Kraft auf ein Volumen V umschreiben lässt. x_j ist hierbei als verallgemeinerte Ortskoordinate zu verstehen. Bei der Größe \vec{S} handelt es sich um den Poyntingvektor, der mit $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ eine lokale Leistungsflussdichte beschreibt. Unter Verwendung des sogenannten *Kronecker-Deltas* δ_{ij} gilt für die Komponenten des Spannungstensors:

$$T_{ij} = \epsilon \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right). \quad (2.3)$$

Die Größe δ_{ij} in der Gl. (2.3) nimmt lediglich für gleiche Indizes i und j den Wert 1 an, ansonsten wird sie identisch Null. Die Komponenten des Tensors lassen sich in einer symmetrischen 3×3 -Matrix anordnen, so dass häufig die folgende Schreibweise Verwendung findet:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Die Indizes wurden dabei so gewählt, dass deutlich wird, welche Basisvektoren für die Beschreibung der Tensorkomponenten gerade Gültigkeit haben – in Gl. (2.4) sind es also kartesische Koordinaten mit \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z des Anschauungsraumes. Die Dimension der Tensorkomponenten ist Kraft pro Fläche und entspricht daher der *mechanischen Spannung*. An dieser Stelle zeigt sich nun der direkte Zusammenhang zum mechanischen Spannungszustand des Raumes, der mit Hilfe der Abbildung 2.1 verdeutlicht werden soll.

Zur Beschreibung dieses Spannungszustandes bedient man sich der Begrifflichkeiten der Festigkeitslehre: Danach stehen im Inneren eines Körpers, bei homogen angenommener Massenverteilung, den äußeren Kräften flächenhaft verteilte Reaktionskräfte entgegen (siehe hierzu beispielsweise [5]). Die Beschreibung des Spannungszustandes eines Punktes erfordert demnach drei Ebenen, denen jeweils ein *Spannungsvektor* \vec{s} zugeordnet ist. Dieser steht mit der Kraft \vec{F} und der Fläche A im folgenden Zusammenhang:

$$\vec{s} = \frac{d\vec{F}}{dA}. \quad (2.5)$$

Für ein infinitesimal kleines Volumen dV sind diese Spannungsvektoren, zusammen mit dem Normalenvektor \vec{n} einer jeden Fläche, in der Abbildung 2.1 schematisch dargestellt.

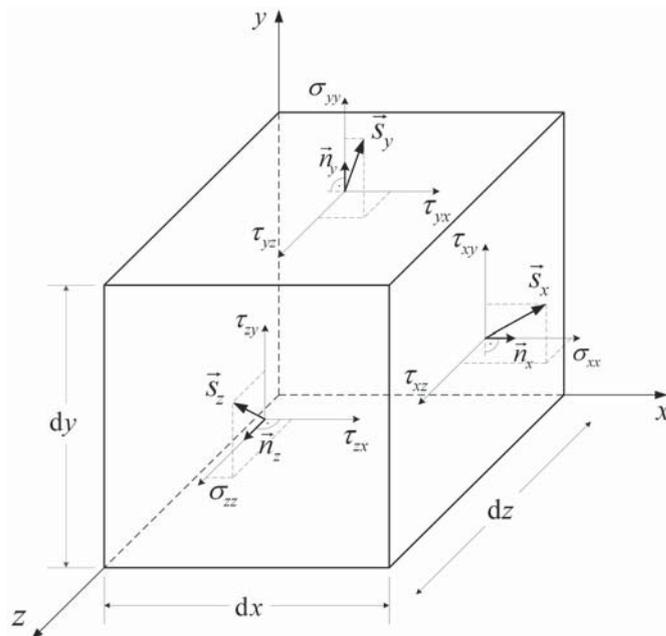


Abbildung 2.1: Spannungsvektoren \vec{s} auf der Oberfläche des Volumens dV

Allen Flächen dieses quaderförmigen Volumens lässt sich demnach ein Spannungsvektor zuweisen, der wiederum in eine *Normalspannung* σ (oder auch Zugspannung) und zwei *Tangentialspannungen* τ (oder auch Schubspannungen) zerlegt werden kann.

Zur Berechnung der elektromagnetischen Kraftwirkung auf einen Körper wird in einem weiteren Schritt die lokal gültige Kraftdichtegleichung (2.2) über das Körpervolumen aufintegriert. Wie bereits erwähnt, kann das Volumenintegral über den Divergenzterm in ein geschlossenes Oberflächenintegral umgeschrieben werden. Dadurch lassen sich die inneren, lokalen Kraftzustände „ausblenden“, und es zählt allein die Feldsituation an der Oberfläche des Volumens. Die Gesamtkraft auf das Volumen V berechnet sich somit zu:

$$F_i = \oint T_{ij} n_j \cdot dA - \epsilon\mu \left(\frac{d}{dt} \iiint (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot dV \right)_i. \quad (2.6)$$

Allgemein lässt sich bis hierhin festhalten, dass neben den Materialkenngrößen ϵ und μ die magnetische Feldstärke \vec{H} sowie das elektrische Feld \vec{E} zu jedem Zeitpunkt bekannt sein müssen, um eine Kraft auf den Körper zu berechnen.

2.1 Kräfte auf den Rotor der Maschine

Die Gl. (2.6) lässt sich für die Anwendung auf die Rotor-Kraftberechnung eines elektrischen Antriebes noch weiter vereinfachen. Dazu werden in erster Linie die Ansätze aus [6] und [7] verwendet und in eine mathematisch geschlossene Darstellung überführt. Unter der Voraussetzung, dass in dem zu betrachtenden Raumgebiet – also dem rotierenden Teil der Maschine – der kreuzgekoppelte Term $\vec{E} \times \vec{H}$ an jedem Ort klein gegenüber dem ersten Term wird, kann dieser Term vernachlässigt werden. Diese Bedingung trifft auf einen Großteil der verschiedenen Maschinentypen zu, da, je nachdem, ob man beispielsweise eine Stelle in einer Nut oder im Eisenmaterial betrachtet, entweder das \vec{E} oder das \vec{H} -Feld i. A. sehr klein ist.

Weiterhin ist *jedes* Volumen, das den Körper einschließt, nach Gl. (2.6) zur Kraftberechnung geeignet. Sinnvollerweise wird man die Oberflächen so legen, dass an diesen Stellen eine geeignete Feldberechnung durchgeführt werden kann. Bei elektrischen Maschinen wären dies die Oberfläche des Rotors selbst, die Bohrungs-Innenfläche sowie der gesamte Luftspaltbereich¹. Hieraus folgt unmittelbar, dass die Kraftwirkungen der elektrischen Felder selbst ebenfalls zu vernachlässigen sind, da entlang der sinnvollen Integrationswege nahezu kein \vec{E} -Feld vorhanden ist. Die Tensorkomponenten aus Gl. (2.3) enthalten daher lediglich \vec{B} -Feldkomponenten. Somit reduziert sich die Gl. (2.6) auf den magnetisch bedingten Kraftanteil

$$F_i = \oint T_{ij} n_j \cdot dA, \quad (2.7)$$

¹Die Felder an den Stirnseiten wurden jeweils zu Null angenommen \rightarrow kein Kraftbeitrag.

mit

$$T_{ij} = \frac{1}{\mu} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right). \quad (2.8)$$

Für die weitere Rechnung wird anstatt des beliebig geformten Körpers (siehe vorheriges Unterkapitel) nun ein Zylinder betrachtet, der den Rotor einer elektrischen Maschine beschreibt. Dazu soll das Modell nach Abbildung 2.2 eingeführt werden. Gedanklich legt man dabei eine *zylinderförmige Hüllfläche* um den Rotor herum (in den Luftspaltbereich), auf der nun die Komponenten der magnetischen Flussdichte bestimmt werden müssen. Weiterhin gilt, wie in Abbildung 2.2 dargestellt, ein kartesisches Bezugssystem (stillstehender Stator der Maschine) in Verbindung mit einem lokalen Zylinderkoordinatensystem. Die Berechnung der Querkräfte findet zunächst in global kartesischen Koordinaten statt, so dass der Integrand in Gl. (2.7), entsprechend der Beschreibung der Feldgrößen in Zylinderkoordinaten² passend parametrisiert werden muss. Die z -Komponente der Flussdichte \vec{B} soll für die weiteren Berechnungen vernachlässigt werden. Daher kann der Beitrag der Zylinder-Stirnflächen zum Integral in Gl. (2.7) unberücksichtigt bleiben. Aus der Transformationsmatrix \mathbf{T}_{zk} und dem Flächennormalenvektor der Zylinder-Mantelfläche \vec{n}_{zm} , mit

$$\mathbf{T}_{zk} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{n}_{zm} = \begin{bmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

folgt für die Gesamtkraft auf den Rotor der Maschine:

$$F_x = \frac{r l_{fe}}{\mu_0} \left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos \gamma (B_n^2 - B_t^2) \cdot d\gamma - \int_0^{2\pi} \sin \gamma B_n B_t \cdot d\gamma \right), \quad (2.10)$$

$$F_y = \frac{r l_{fe}}{\mu_0} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin \gamma (B_n^2 - B_t^2) \cdot d\gamma}_I + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \gamma B_n B_t \cdot d\gamma}_{II} \right). \quad (2.11)$$

Die Indizes n und t der Feldkomponenten meinen die Normal- beziehungsweise Tangentialkomponente im Zylinderkoordinatensystem, also $\vec{n} \parallel \vec{e}_r$ und $\vec{t} \parallel \vec{e}_\varphi$. Die Gleichungen (2.10) und (2.11) stellen zunächst für diesen Fall die allgemeinen Kraftgleichungen dar, die sich mittels zusätzlicher Annahmen über die Beschaffenheit der Feldgrößen weiter vereinfachen lassen. Aus dieser Darstellung wird weiterhin klar, wie der Begriff der *Querkraft* zu verstehen ist, nämlich als lateraler Kraftvektor (hier in der xy -Ebene).

²Aus 2-D Feldberechnung in Zylinderkoordinaten

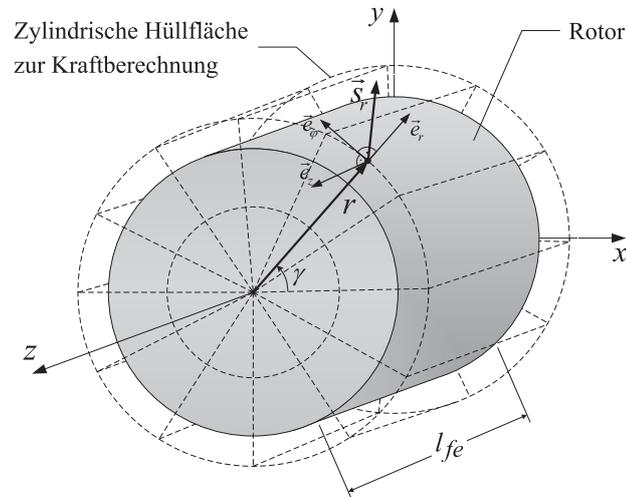


Abbildung 2.2: Rotormodell für die Kraftberechnung

2.2 Analyse der Querkraftgleichungen

Unter den im vorherigen Unterkapitel 2.1 getroffenen Annahmen, über die Feldsituation in dem zu betrachtenden Raumgebiet, ist zu konstatieren, dass die Kraftwirkung auf den Rotor neben den geometrischen Größen r und l_{fe} nunmehr ausschließlich von den Feldkomponenten der magnetischen Flussdichte \vec{B} im Luftspalt der Maschine abhängig ist. Um zu einer für die praktische Anwendung vorteilhafteren Darstellung zu gelangen, werden sämtliche Feldkomponenten des Luftspalts als *umlaufende harmonische Wellen* eingeführt. Lineare Verhältnisse im gesamten Eisenkreis vorausgesetzt, bilden diese, gemäß dem Superpositionsprinzip, das Gesamtfeld mittels endlicher Fourier-Reihen nach. Streng genommen wären selbstverständlich unendliche Reihendarstellungen notwendig, dennoch wird man feststellen, dass in der Anwendung dieser Gleichungen eine Näherung mit einer stark begrenzten Anzahl von Fourier-Koeffizienten in den meisten Fällen ausreichend ist.

Zunächst soll der allgemeine Zusammenhang zwischen den Querkraften und den unterschiedlichen Wellen im Luftspalt untersucht werden, um in einem weiteren Schritt eine einfach nutzbare Querkraftgleichung für einzelne Feldkomponenten ableiten zu können. Es ist nun zweckmäßig, das Entwicklungsintervall für die Fourierreihendarstellung auf den gesamten Maschinenumfang zu beziehen, also $0 \dots 2\pi$. Durch diese Konvention kann eine Einteilung in Unter-, Grund- und Oberwellen, mit jeweils ganzzahligen Ordnungszahlen, vorgenommen werden [8]. Für alle weiteren Überlegungen soll daher ausschließlich von der *Ordnung ν einer bestimmten Welle* die Rede sein, mit $\nu \in \mathbb{Z}$. Anstelle von Ordnungszahlen ließen sich auch bestimmte Wellenlängen λ zur Beschreibung heranziehen, die dann mit Hilfe des Radius r sowie dem Zusammenhang

$$\lambda = \frac{r}{\nu} 2\pi \quad (2.12)$$

ineinander umzurechnen sind. Zur weiteren Analyse der Gleichungen (2.10) und (2.11) werden folgende allgemeine Reihen eingeführt:

$$B_n(r, \gamma, t) = \sum_{\nu=-m}^m B_{n,\nu}(r, \gamma, t) = \sum_{\nu=-m}^m \hat{B}_{n,\nu}(r) \sin(\omega_\nu t - \nu\gamma + \varphi_\nu), \quad (2.13)$$

$$B_t(r, \gamma, t) = \sum_{\nu=-m}^m B_{t,\nu}(r, \gamma, t) = \sum_{\nu=-m}^m \hat{B}_{t,\nu}(r) \sin(\omega_\nu t - \nu\gamma + \varphi_\nu). \quad (2.14)$$

Es werden Feldwellen bis zur m -ten Ordnung berücksichtigt. Diese Reihen können nun aus beliebig vielen Unterreihen mit entsprechend angepassten Indizes bestehen. So könnte beispielsweise die Normalkomponente B_n in Gl. (2.13) Erregerfeldwellen des ungenutzten Stators sowie durch die Nutung hervorgerufene Wellen enthalten. Diese haben dann der Kreisfrequenz ω_ν und der Ordnungszahl ν entsprechende Umlaufgeschwindigkeiten und Umlaufrichtungen. Die Feldkomponenten der Gleichungen (2.13), (2.14) werden in die Gleichungen (2.10), (2.11) eingesetzt und die Terme I und II nachfolgend näher betrachtet.

Term I

Im Integranden der Gleichungen (2.10), (2.11) muss das Quadrat der Feldkomponenten berechnet werden. Mathematisch handelt es sich hierbei um das Quadrat eines Multinoms, also einer Summe mit mehr als zwei Summanden. Um bei der folgenden Analyse weiterhin eine mathematisch geschlossene Darstellung beizubehalten, wird der sogenannte *Multinomialkoeffizient* verwendet [4]. Dieser ist definiert als

$$\binom{n}{\{k_1, \dots, k_z\}} := \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_z!}, \quad (2.15)$$

mit $k_i \in \mathbb{N}_0$ für die zusätzlich die Bedingung

$$k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_z = n \quad (2.16)$$

erfüllt sein muss. Dies ist so zu verstehen, dass nur die k_i in Gl. (2.15) auftreten können, die diese Bedingung erfüllen, alle anderen fallen heraus. Wie noch gezeigt werden wird, besteht durch diese Bedingung nun die Möglichkeit, bestimmte Terme der Summen auszublenden.

Durch das Quadrieren der Summe des Querkraftintegrals taucht jeder Summand selbst zum Quadrat auf, was bedeutet, dass diese Terme als Beiträge zur Querkraft Null werden. Es lässt sich allgemein zeigen, dass mit $c \in \mathbb{Z}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\beta - cx) \sin x \cdot dx = 0. \quad (2.17)$$

Die Gl. (2.17) gilt jeweils für Sinus- und Kosinusfunktionen, woraus folgt, dass alle quadratischen Terme der Kraftgleichungen (2.10), (2.11) bereits vor der eigentlichen Integration herausfallen können. Mit Hilfe der Gl. (2.15) lassen sich nun beide Summen-Quadrate umschreiben in³:

$$\left(\sum_{\nu=-m}^m B_{n,\nu} \right)^2 = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_z=2 \\ \& k_i=1}} \binom{2}{\{k_1, \dots, k_z\}} B_{n,1}^{k_1} B_{n,2}^{k_2} \dots B_{n,z}^{k_z}, \quad (2.18)$$

$$\left(\sum_{\nu=-m}^m B_{t,\nu} \right)^2 = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_z=2 \\ \& k_i=1}} \binom{2}{\{k_1, \dots, k_z\}} B_{t,1}^{k_1} B_{t,2}^{k_2} \dots B_{t,z}^{k_z}. \quad (2.19)$$

Die Zahl z gibt die Anzahl aller vorkommenden Wellen der Summe wieder. Entsprechend der Zusatzbedingung $k_i = 1$ muss somit über jedes mögliche Produkt zweier Wellen der Normal- und Tangentialkomponenten integriert werden. Es ergibt sich unter den hier getroffenen Annahmen offenbar ein Kraftbeitrag, der von einem einzelnen *Wellenpaar* verursacht wird. Aus der Summation über alle Einzelkräfte erhält man folglich die Gesamtkraft auf den Maschinenrotor. Mit der jeweiligen Betrachtung eines Wellenpaares wird das analytisch gewonnene Ergebnis in Gl. (2.17) auch physikalisch sofort plausibel, da eine Feldwelle nur aus sich selbst heraus keine Querkraftwirkung hervorrufen kann.

Term II

Die für den Term I gültigen Bedingungen – aus der vorherigen Analyse folgend – lassen sich selbstverständlich auch hier anwenden. So treten auch an dieser Stelle für die Berechnung jeweils nur Wellenpaare auf, die die gleichen Argumente der Winkelfunktionen nach Gl. (2.13) aufweisen. Der Unterschied besteht lediglich darin, dass hier die Kraftwirkung der normalen Feldkomponenten in Verbindung mit den tangentialen bestimmt wird.

³Die Abhängigkeit von r , γ und t ist aus Gründen der Übersichtlichkeit hier nicht explizit dargestellt.

Zusammenfassend lassen sich die Kraftgleichungen (2.10), (2.11) unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.13), (2.14) und (2.18), (2.19) nun auf die folgende Form bringen:

$$F_x = \frac{rl_{fe}}{\mu_0} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \cos \gamma \left(\sum_{\substack{k_1+\dots+k_z=2 \\ \& k_i=1}} \binom{2}{\{k_1, \dots, k_z\}} B_{n,1}^{k_1} B_{n,2}^{k_2} \dots B_{n,z}^{k_z} \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{\substack{k_1+\dots+k_z=2 \\ \& k_i=1}} \binom{2}{\{k_1, \dots, k_z\}} B_{t,1}^{k_1} B_{t,2}^{k_2} \dots B_{t,z}^{k_z} \right) - \sin \gamma \sum_{\nu=-m}^m B_{n,\nu} \sum_{\nu=-m}^m B_{t,\nu} \right] \cdot d\gamma, \quad (2.20)$$

$$F_y = \frac{rl_{fe}}{\mu_0} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \sin \gamma \left(\sum_{\substack{k_1+\dots+k_z=2 \\ \& k_i=1}} \binom{2}{\{k_1, \dots, k_z\}} B_{n,1}^{k_1} B_{n,2}^{k_2} \dots B_{n,z}^{k_z} \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{\substack{k_1+\dots+k_z=2 \\ \& k_i=1}} \binom{2}{\{k_1, \dots, k_z\}} B_{t,1}^{k_1} B_{t,2}^{k_2} \dots B_{t,z}^{k_z} \right) + \cos \gamma \sum_{\nu=-m}^m B_{n,\nu} \sum_{\nu=-m}^m B_{t,\nu} \right] \cdot d\gamma. \quad (2.21)$$

Die bis hierhin vorliegende Rechenvorschrift besagt demnach, dass im Allgemeinen jeweils drei Kraftterme auszuwerten sind: Alle möglichen Wellenpaar-Kombinationen sowohl der normalen als auch der tangentialen Feldkomponenten, sowie alle möglichen Paarungen untereinander. Es ist zu erwarten, dass es je nach Maschinentyp und Magnetkreisentwurf (tangentele und normale Komponenten unterschiedlich stark ausgeprägt) zu dominierenden Termen kommt. Diese unterschiedlichen Ausprägungen und damit zum Teil verbundenen Vereinfachungen werden an späterer Stelle weiter diskutiert.

2.2.1 Allgemeine Querkraftbedingungen für ein Wellenpaar

Eine weitere deutlich vereinfachte Beschreibung wird erreicht, wenn bei der Betrachtung eines Wellenpaares zusätzlich die Phasen (Argumente der Winkelfunktionen) und insbesondere die unterschiedlichen Wellenlängen näher betrachtet werden. Dazu wird im Folgenden ein beliebiges Wellenpaar ν_b, ν_c der tangentialen oder normalen Flussdichtekomponenten betrachtet. Der für die Integration relevante Teil des dazugehörigen Integranden lautet unter Berücksichtigung geeigneter Additionstheoreme für Winkelfunktionen in diesem Fall für beispielsweise F_y :

$$\begin{aligned} \sin \gamma \sin(\omega_{\nu_b} t - \nu_b \gamma + \varphi_{\nu_b}) \sin(\omega_{\nu_c} t - \nu_c \gamma + \varphi_{\nu_c}) = \\ \sin [(\omega_{\nu_b} + \omega_{\nu_c}) t - (\nu_b + \nu_c + 1) \gamma + \varphi_{\nu_b} + \varphi_{\nu_c}] \\ + \sin [(\omega_{\nu_c} - \omega_{\nu_b}) t + (\nu_b - \nu_c + 1) \gamma + \varphi_{\nu_c} - \varphi_{\nu_b}] \\ + \sin [(\omega_{\nu_b} - \omega_{\nu_c}) t + (\nu_c - \nu_b + 1) \gamma + \varphi_{\nu_b} - \varphi_{\nu_c}] \\ - \sin [(\omega_{\nu_b} + \omega_{\nu_c}) t - (\nu_b + \nu_c - 1) \gamma + \varphi_{\nu_b} + \varphi_{\nu_c}]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Eine analoge Umrechnung, die auf die gleichen Argumente der Winkelfunktionen führt, ergibt sich mit $\cos \gamma$ anstatt von $\sin \gamma$ für F_x . Durch die Integration der Gl. (2.22) über den Umfangswinkel γ treten $(\nu_b + \nu_c + 1)^{-1}$, $(\nu_b - \nu_c + 1)^{-1}$, $(\nu_c - \nu_b + 1)^{-1}$ und $(\nu_b + \nu_c - 1)^{-1}$ als Vorfaktoren auf. Weiterhin ergibt sich der Kraftbeitrag der einzelnen Terme immer zu Null (bei Integration von $0 \dots 2\pi$), außer in den Fällen, bei denen einer der Vorfaktoren unendlich groß wird. Man erhält dann eine Gleichung vom Typ Null durch Null, die allerdings im Grenzwert gegen einen endlichen Wert konvergiert. Diese Fälle lauten:

$$\left. \begin{array}{l} \nu_c = \nu_b + 1, \\ \nu_c = \nu_b - 1, \end{array} \right\} \text{gleiche Umlaufrichtung der Wellen} \quad (2.23)$$

$$\left. \begin{array}{l} \nu_c = -(\nu_b + 1), \\ \nu_c = -(\nu_b - 1). \end{array} \right\} \text{ungleiche Umlaufrichtung der Wellen} \quad (2.24)$$

Aus diesen vier Fällen lassen sich nun direkt die Bedingungen zur Entstehung einer Querkraft ableiten. Die folgenden Aussagen beziehen sich demnach immer auf ein beispielhaftes *Wellenpaar* als elementarer Bestandteil der Querkraftgleichungen:

1. Es tragen ausschließlich Wellenpaare (ν_b, ν_c) von Null verschiedene Werte zur Querkraftsumme bei, für die gilt:

$$|\nu_c| = |\nu_b| \pm 1. \quad (2.25)$$

Das heißt, dass nur *benachbarte Ordnungszahlen* des Luftspaltfeldspektrums eine Querkraft bedingen, alle anderen Paarungen ergeben keine Kraft.

2. Weisen die Wellen des Wellenpaares *gleiche Umlaufrichtungen* entsprechend der Gl. (2.23) auf und ist weiterhin die Gl. (2.25) erfüllt, so läuft der Querkraftvektor dieses Wellenpaares mit der mechanischen Differenzkreisfrequenz $\Omega_{qk} = |\omega_{\nu_c} - \omega_{\nu_b}|$ und entsprechend der

$$\text{Umlaufrichtung: } \left\{ \begin{array}{l} \text{mit dem Wellenpaar, für } \omega_{\nu_b} < \omega_{\nu_c} \text{ und } |\nu_b| < |\nu_c|, \\ \text{entgegen dem Wellenpaar, für } \omega_{\nu_b} > \omega_{\nu_c} \text{ und } |\nu_b| < |\nu_c|, \end{array} \right.$$

um. Bei $\omega_{\nu_b} = \omega_{\nu_c}$ wird der Querkraftvektor zeitlich unabhängig, und die Richtung der Kraft am Umfang entspricht der Differenz der Nullphasenwinkel $\varphi_{\nu_c} - \varphi_{\nu_b}$. Dieser Fall ist von hohem praktischen Nutzen, wenn die Kreisfrequenzen und Phasenwinkel von außen vorgegeben werden können.

3. Besitzen die Wellen des Wellenpaares *ungleiche Umlaufrichtungen* entsprechend der Gl. (2.24) und ist weiterhin die Gl. (2.25) erfüllt, so läuft der Querkraftvektor dieses Wellenpaares mit der mechanischen Summenkreisfrequenz $\Omega_{qk} = \omega_{\nu_b} + \omega_{\nu_c}$ um. Die

Umlaufrichtung dieses Querkraftvektors entspricht immer der Umlaufrichtung der dem Betrage nach größeren Ordnungszahl.

Diese zunächst recht allgemein gehaltenen Aussagen über die Existenz und die Art von Querkraften in rotierenden elektrischen Maschinen sind besonders im Entwurfsprozess von Nutzen. So besteht beispielsweise die Möglichkeit, geräuschanregende Kräfte (umlaufend) bereits im Vorfeld anhand der vorhandenen Ordnungszahlen zu minimieren. Weiterhin lassen sich stillstehende Kräfte auch gezielt zur Lagerung des Rotors einsetzen (siehe nachfolgendes Kapitel 2.3), was dann genau dem lagerlosen Maschinenprinzip (Querkraftmaschine) entspricht.

Abschließend soll noch ein Beispiel angeführt werden, das die statische Rotorexzentrizität einer 4-poligen, permanentmagneterregten Maschine zeigt. Eine schematische Darstellung dieser Situation ist in der Abbildung 2.3 zu sehen, in der zusätzlich ein möglicher Rotorlauf dargestellt ist – dynamische Exzentrizität genannt. Es soll in diesem Beispiel ausschließlich das Leerlauf Feld der Maschine betrachtet werden. Nach [8] entstehen durch das Verschieben des Rotors aus der Bohrungsmitte sogenannte Exzentrizitätsfeldwellen, für die mittels einer geeigneten Leitwertfunktion eine analytische Abschätzung vorgenommen werden kann. Mit der Kenntnis dieser Wellen lässt sich in guter Näherung eine Aussage über die entstehende *Exzentrizitätskraft* machen. Die Analyse in [8] zeigt weiterhin, dass gemäß der zuvor aufgestellten Querkraftbedingungen auch in diesem Fall Wellenpaare entstehen, die als Teil der Gesamtkraft zu interpretieren sind. Die dann auftretende Querkraft zeigt immer in Richtung der Verschiebung γ_{ex} , wie in der Abbildung 2.3 durch \vec{F}_{ex} angedeutet ist. Im Fall des sich um die Bohrungsmittelachse drehenden Rotors bleibt der Kraftbetrag konstant. Lediglich die Krafttrichtung ändert sich entsprechend, so

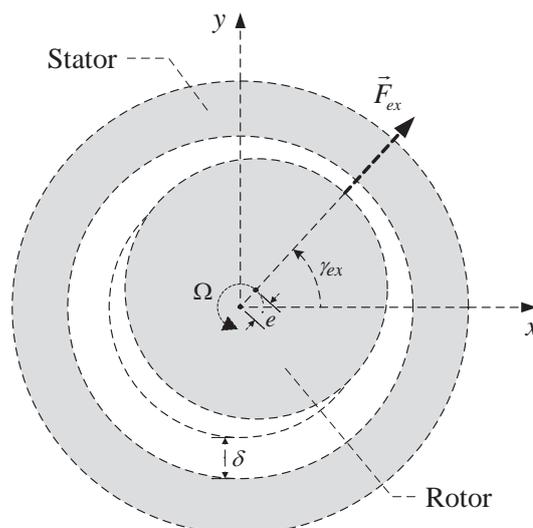
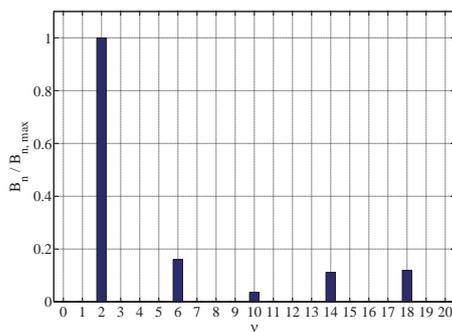


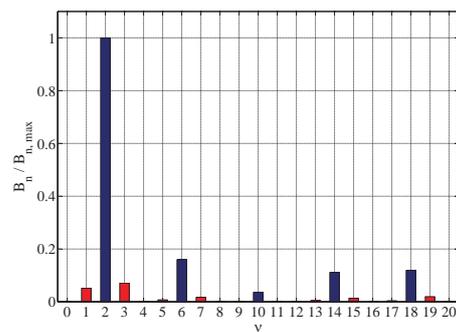
Abbildung 2.3: Beispiel einer dynamischen Rotor-Exzentrizität e (ohne Nutung)

dass eine umlaufende Kraft entsteht. Anhand einer konkreten Maschine, mit der Polpaarzahl $p = 2$ und einem $e/\delta = 1/2$, wurde das Leerlauf-Luftspaltfeld sowie die vorhandene Exzentrizitätskraft bei sowohl zentrischem als auch exzentrischem Rotor mittels numerischer FE-Rechnung bestimmt. Die Spektren der Normal- und Tangentialkomponenten der magnetischen Leerlaufflussdichte im Luftspalt sind in der Abbildung 2.4 dargestellt.

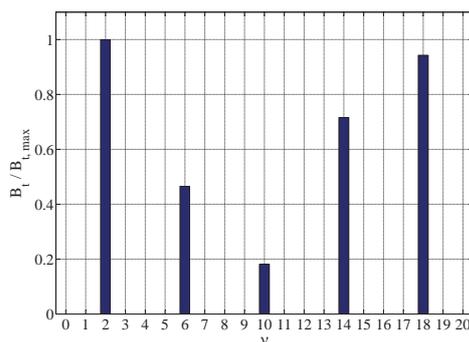
Die rot hervorgehobenen Balken stellen hierbei die Exzentrizitätsfeldwellen dar, die in Kombination mit den stets vorhandenen Ordnungen (blaue Balken) Exzentrizitätskräfte generieren. Je nach Phasenlage der einzelnen Wellen entstehen so unterschiedliche Richtungen der Querkraft am Umfang. In dem dargestellten Beispiel wurde der Rotor entlang der y -Achse verschoben und die auftretende Kraft mittels eines Finite-Elemente-Modells der Anordnung bestimmt. Unter Berücksichtigung der Flussdichtewellen bis zur 100-sten Ordnung ergeben sich für die Gesamtquerkraft Abweichungen von unter 0,5 % (Betrag und Richtung).



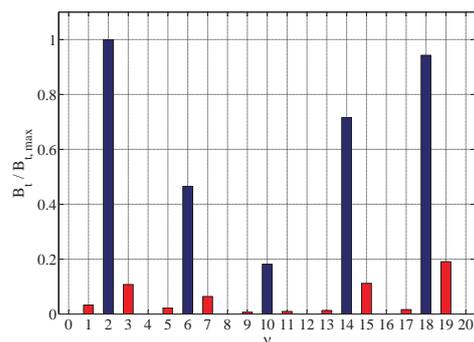
(a) Flussdichte-Normalkomponenten des zentrischen Rotors



(b) Flussdichte-Normalkomponenten des exzentrischen Rotors



(c) Flussdichte-Tangentialkomponenten des zentrischen Rotors



(d) Flussdichte-Tangentialkomponenten des exzentrischen Rotors

Abbildung 2.4: Vergleich der Amplitudenspektren bei statischer Rotorexzentrizität (aus FE-Rechnungen, Darstellung bis zur 20-sten Ordnung)