1 Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden verschiedene Färbungen einer speziellen Klasse endlicher oder unendlicher Graphen untersucht, der sogenannten *Distanzgraphen*. Diese Fragestellungen gehen auf ein 60 Jahre altes Problem zurück:

> Wie viele Farben sind nötig, um die Punkte der euklidischen Ebene so zu färben, dass Punkte im Abstand 1 verschieden gefärbt sind?

Anders ausgedrückt: Welches ist die kleinste natürliche Zahl m mit der Eigenschaft, dass es eine Überdeckung der euklidischen Ebene durch m Punktmengen gibt, so dass keine der m Mengen ein Paar von Punkten im Abstand 1 enthält?

Bis heute ist nur bekannt, dass die gesuchte Anzahl zwischen 4 und 7 liegt. Diese Schranken wurden bereits 1950 von Edward Nelson, der das Problem formulierte, und von John Isbell bestimmt, die Ergebnisse sowie das Problem selbst wurden jedoch nicht veröffentlicht. Das Problem wurde 1961 von Hugo Hadwiger [38] aufgegriffen und verbreitet. Heute wird es deshalb als *Hadwiger-Nelson-Problem* bezeichnet. Die Entstehungsgeschichte wurde von Alexander Soifer recherchiert und 2003 in [72] sowie 2009 in [73] veröffentlicht.

Die untere Schranke kann man an der sogenannten *Moser-Spindel* nachprüfen (siehe Abbildung 1.1, nach Moser und Moser [62]). Die Punkte eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 1 müssen paarweise verschieden gefärbt werden. Werden nur drei Farben benutzt und wird ein Dreieck an einer Seite gespiegelt, so müssen die der gemeinsamen Seite gegenüberliegenden Ecken gleich gefärbt werden. Durch Drehen um eine solche Ecke folgt, dass alle Punkte auf dem Kreisrand eines Kreises mit Radius $\sqrt{3}$ die gleiche Farbe wie der Mittelpunkt haben müssen, was zu einem Widerspruch führt, da auf dem Kreisrand Punkte im Abstand 1 enthalten sind (Beweis nach Hadwiger [38]).

Die obere Schranke 7 kann durch eine Parkettierung der Ebene mit kongruenten regulären Sechsecken der Seitenlänge $2/5$ nachgewiesen werden. Färbt man die Sechsecke abwechselnd mit 7 Farben entsprechend Abbildung 1.2 (nach Hadwiger [38]), so gibt es keine gleich gefärbten Punkte in einem Abstand d mit $4/5 < d < \sqrt{28}/5$, also speziell keine gleich gefärbten Punkte im Abstand 1.

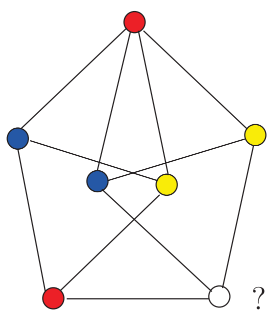

Abbildung 1.1: Moser-Spindel

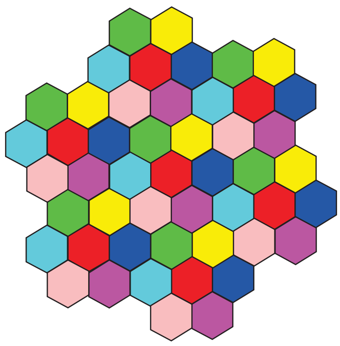

Abbildung 1.2: Parkettierung der Ebene mit Sechsecken

Eggleton, Erdős und Skilton verallgemeinerten 1985 [32] dieses Problem, indem Sie die gleiche Frage für die Punkte einer Geraden und später für die Punkte beliebiger euklidischer und metrischer Räume stellten, was zu einer allgemeinen Definition von Distanzgraphen führte (Eggleton [29], vergleiche Definition 2.1).

Sei D eine Teilmenge der positiven reellen Zahlen, und sei S eine nichtleere Teilmenge des n-dimensionalen euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$. Der Distanzgraph $G\,(S, D)$ ist der Graph mit Knotenmenge S, in dem zwei Knoten genau dann benachbart sind, wenn ihr euklidischer Abstand in der sogenannten Distanzmenge D enthalten ist.

Mit dieser Definition lässt sich das Hadwiger-Nelson-Problem folgendermaßen beschreiben: Sei $G\,(\mathbb{R}^2, \{1\})$ der sogenannte *Einheitsdistanzgraph der Ebene*, der alle Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$ als Knoten enthält, und in dem zwei Punkte der Ebene genau dann benachbart sind, wenn der euklidische Abstand dieser Punkte 1 beträgt. Gesucht ist die kleinste Anzahl von Farben, die nötig ist, um alle Knoten des Distanzgraphen $G\,(\mathbb{R}^2, \{1\})$ so zu färben, dass benachbarte Knoten verschieden gefärbt sind, die sogenannte chromatische Zahl $\chi\,(G\,(\mathbb{R}^2, \{1\}))$ des Distanzgraphen.

In der vorliegenden Arbeit werden in Kapitel 2 Distanzgraphen in einer allgemeinen Form eingeführt und einige einfache Eigenschaften von Distanzgraphen mit Knotenmenge $\mathbb{Z}$ (sogenannte ganzzahlige Distanzgraphen) untersucht, darunter Fragen über den Zusammenhang und über die im Graphen enthaltenen Kreise.

In Kapitel 3 wird das oben beschriebene Problem der Bestimmung der chromatischen Zahl von Distanzgraphen untersucht. Um die chromatische Zahl $\chi(G)$ eines Graphen G zu bestimmen, muss man im Allgemeinen zwei Aussagen beweisen: Einerseits muss man zeigen, dass es eine Färbung mit k Farben gibt, woraus $\chi(G) \leq k$ folgt, andererseits muss man zeigen, dass mindestens k Farben nötig sind, um den Graphen zu färben, woraus $\chi(G) \geq k$ folgt. Zusammen ergibt sich $\chi(G) = k$.

Neben Ergebnissen aus der Literatur über die chromatische Zahl von Graphen, die im weiteren Verlauf der Arbeit benötigt werden, werden hier die ganzzahligen Distanzgraphen $G(\mathbb{Z}, D)$, die $|D|$ oder $|D| + 1$ paarweise benachbarte Knoten enthalten, vollständig charakterisiert, und die chromatischen Zahlen dieser Distanzgraphen werden bestimmt, sofern sie nicht bereits bekannt waren.

Es wird ein Zusammenhang zwischen den chromatischen Zahlen ganzzahliger Distanzgraphen und spezieller endlicher Distanzgraphen, den sogenannten zirkulanten Graphen, bewiesen, womit sich obere Schranken für die chromatischen Zahlen ganzzahliger Distanzgraphen angeben lassen, die einige bekannte obere Schranken wie $\chi(G(\mathbb{Z}, D)) \leq |D| + 1$ verbessern.

Ein weiteres Ergebnis dieses Kapitels ist die Bestimmung einer allgemeinen oberen Schranke für die chromatische Zahl von Distanzgraphen $G(S, D)$ mit $S \subseteq \mathbb{R}^n$, sofern bestimmte Bedingungen erfüllt sind: Es gilt dann $\chi(G(S, D)) \leq \Delta(G(S, D))/2 + 1$, wobei $\Delta(G(S, D))$ den Maximalgrad des Distanzgraphen bezeichnet. Dies stellt eine Verallgemeinerung der oben angegebenen Schranke $\chi(G(\mathbb{Z}, D)) \leq |D| + 1$ dar.

In den folgenden Kapiteln werden weitere Färbungsarten von Distanzgraphen betrachtet. In Kapitel 4 werden sogenannte Listenfärbungen untersucht, bei denen die Farbe eines jeden Knotens aus einer vorgegebenen Liste von Farben ausgewählt werden muss. Die kleinste Zahl k, für die es bei beliebiger Wahl von Listen der Länge mindestens k stets eine zulässige Färbung der Knoten gibt, wird listenchromatische Zahl $\mathrm{ch}(G)$ des Graphen G genannt.

In diesem Kapitel wird die Schranke $\mathrm{ch}(G(\mathbb{Z}, D)) \leq |D| + 1$ für die listenchromatische Zahl ganzzahliger Distanzgraphen bewiesen. Außerdem wird die listenchromatische Zahl einer Reihe von ganzzahligen Distanzgraphen bestimmt, darunter solche mit ein- oder zweielementigen Distanzmengen, mit dreielementigen Distanzmengen $D = \{x, y, x + y\}$ und $D = \{x, 2x, y\}$ sowie mit Distanzmengen $D = \{x, 2x, \ldots, nx, y\}$ mit $x > 1$ und $D = \{1, 2, \ldots, n, y\}$.

Desweiteren wird kurz auf eine Verallgemeinerung von Listenfärbungen eingegangen, den sogenannten (a, b)-Listenfärbungen, und es werden mehrere Ergebnisse über die listenchromatische Zahl ganzzahliger Distanzgraphen auf Distanzgraphen $G(\mathbb{R}, D)$ übertragen. Zuletzt wird gezeigt, dass die obere Schranke $\Delta(G(S, D))/2 + 1$ auch für die listenchromatische Zahl der Distanzgraphen $G(S, D)$ mit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt, sofern einige Bedingungen erfüllt sind.

Färbt man statt der Knoten die Kanten eines Graphen, so spricht man von Kanten- und Listenkantenfärbungen bzw. von kantenchromatischen und listenkantenchromatischen Zahlen. In Kapitel 5 werden unter anderem die kantenchromatischen und listenkantenchromatischen Zahlen aller Distanzgraphen mit Knotenmengen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sowie aller Distanzgraphen $G(S, D)$ mit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ bestimmt, die gewissen Symmetriebedingungen genügen, darunter Distanzgraphen mit Knotenmengen $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ und $\mathbb{R}^n$. Es wird gezeigt, dass die kantenchromatische und die listenkantenchromatische Zahl dieser Distanzgraphen stets gleich sind, womit die sogenannte Listenkantenfärbungsvermutung für diese Distanzgraphen nachgewiesen wird.

Werden sowohl Knoten als auch Kanten eines Graphen gefärbt, so spricht man von Total- und Listentotalfärbungen bzw. von totalchromatischen und listentotalchromatischen Zahlen, die das Thema von Kapitel 6 sind. Die Ergebnisse über Kantenfärbungen lassen sich auf Totalfärbungen übertragen, so dass in diesem Kapitel unter anderem die totalchromatischen und die listentotalchromatischen Zahlen aller Distanzgraphen mit Knotenmengen $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ und $\mathbb{R}^n$ vollständig bestimmt werden. Auch in diesen Fällen sind die totalchromatischen und die listentotalchromatischen Zahlen dieser Distanzgraphen stets gleich, also gilt die sogenannte Listentotalfärbungsvermutung für diese Distanzgraphen.

In Kapitel 7 werden diese klassischen Färbungsarten mittels sogenannter Grapheneigenschaften, also speziellen Klassen von Graphen, verallgemeinert und erste Ergebnisse über diese Art verallgemeinerter Knoten- und Kantenfärbungen von ganzzahligen Distanzgraphen bewiesen. Unter anderem werden die chromatischen Zahlen für alle bipartiten ganzzahligen Distanzgraphen und für ganzzahlige Distanzgraphen mit ein- oder zweielementiger Distanzmenge vollständig bestimmt.

Einige der Ergebnisse aus Kapitel 2 und 3 über ganzzahlige Distanzgraphen stammen aus der eigenen Diplomarbeit [60]. Einige der Ergebnisse aus Kapitel 3–6 sind bereits in referierten Zeitschriften veröffentlicht [53, 54, 55, 56]. Die Stellen sind entsprechend gekennzeichnet.

In dieser Arbeit wird angenommen, dass der Leser mit den Grundbegriffen der Graphentheorie vertraut ist. Weitere Grundlagen der Graphentheorie und in dieser Arbeit nicht definierte Begriffe findet man zum Beispiel in [9, 51, 88].

Falls nichts anderes gesagt wird, werden in der Arbeit ausschließlich schlichte Graphen behandelt, also Graphen ohne Mehrfachkanten und ohne Schlingen.

2 Eigenschaften von Distanzgraphen

In diesem Kapitel werden Distanzgraphen definiert. Anschließend werden einige einfach zu bestimmende Eigenschaften wie Zusammenhang, Kantenzusammenhang und Taillenweite untersucht.

2.1 Einleitung

Distanzgraphen wurden 1985 von Eggleton, Erdős und Skilton [32] sowie unabhängig davon von Watkins [86] als *unendliche zirkulante Graphen* eingeführt. Eine allgemeine Definition dieser Graphen findet man etwa in [29, 30]:

Definition 2.1. Sei S eine nichtleere Teilmenge des n-dimensionalen euklidischen Raumes, also $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, und D eine Menge positiver reeller Zahlen, $D \subseteq \mathbb{R}^+$. Der *Distanzgraph* $G(S, D)$ ist der (endliche oder unendliche) Graph mit Knotenmenge $V\big(G(S, D)\big) = S$, in dem zwei Knoten $u, v \in S$ genau dann benachbart sind, wenn ihr euklidischer Abstand $\|u - v\|_2$ ein Element von D ist, wobei mit $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^n}$ die *euklidische Norm* von $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet wird. Die Menge D wird *Distanzmenge* genannt und Elemente aus D *Distanzen* oder *Abstände*.

Es gilt also $V\big(G(S, D)\big) = S$ und $E\big(G(S, D)\big) = \{uv : u, v \in S, \|u - v\|_2 \in D\}$.

Beispiel 2.2. Der Distanzgraph $G(\mathbb{Z}^2, \{1\})$ besitzt die Menge aller Punkte der euklidischen Ebene mit ganzzahligen Koordinaten als Knotenmenge. Zwei Knoten sind genau dann benachbart, wenn ihr Abstand 1 beträgt, das heißt, wenn sich die beiden Knoten in genau einer Komponente um genau 1 unterscheiden. Jeder Knoten $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ besitzt also vier Nachbarn $(x \pm 1, y) \in \mathbb{Z}^2$ und $(x, y \pm 1) \in \mathbb{Z}^2$. Somit bildet $G(\mathbb{Z}^2, \{1\})$ ein unendliches Quadrat-Gitter (siehe Abbildung 2.1).

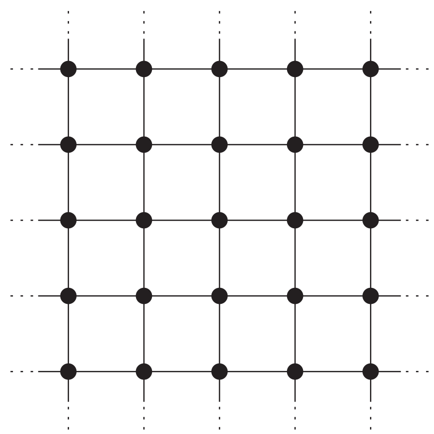

Abbildung 2.1: Der Distanzgraph $G(\mathbb{Z}^2, \{1\})$

In dieser Arbeit werden hauptsächlich Distanzgraphen mit den Knotenmengen $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$ und $\mathbb{Z}^n$ untersucht, insbesondere die eindimensionalen Fälle mit $n = 1$. Der Abstand zweier Knoten u und v zueinander wird dann durch den gewöhnlichen Absolutbetrag $|u - v|$ bestimmt.

Definition 2.3. Distanzgraphen $G(\mathbb{Z}, D)$ mit $D \subseteq \mathbb{N}$ heißen (*eindimensionale*) *ganzzahlige Distanzgraphen*, Distanzgraphen $G(\mathbb{Q}, D)$ mit $D \subseteq \mathbb{Q}^+$ (*eindimensionale*) *rationale Distanzgraphen*, Distanzgraphen $G(\mathbb{R}, D)$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^+$ (*eindimensionale*) *reelle Distanzgraphen.*

Notation 2.4. Für ganzzahlige Distanzgraphen werden folgende abkürzende Schreibweisen benutzt:

$$G(\mathbb{Z}, D) = G(D) = G(d_1, d_2, \ldots), \text{ für } D = \{d_1, d_2, \ldots\}.$$

Bemerkung 2.5. Die Einschränkung auf natürliche Abstände für eindimensionale ganzzahlige Distanzgraphen bzw. auf rationale Abstände für eindimensionale rationale Distanzgraphen ist sinnvoll, da in diesen Fällen nichtganze Zahlen bzw. irrationale Zahlen als Abstände keine Kanten erzeugen, $G(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}) \cong G(\mathbb{Z}, \emptyset)$ bzw. $G(\mathbb{Q}, \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+) \cong G(\mathbb{Q}, \emptyset)$, und der Zusammenhang zwischen Mächtigkeit der Distanzmenge und Grad der Knoten geht verloren (vergleiche Lemma 2.8).

Die Situation ändert sich in höheren Dimensionen, so dass dann irrationale Abstände zugelassen sein sollten.

Beispiel 2.6. Der Distanzgraph $G(\mathbb{Z}^2, \{\sqrt{2}\})$ ist isomorph zu zwei Kopien von $G(\mathbb{Z}^2, \{1\})$, die durch die Knoten $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ mit $x + y$ gerade bzw. ungerade induziert werden (siehe Abbildung 2.2).

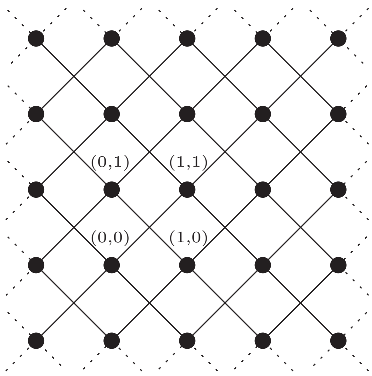

Abbildung 2.2: Der Distanzgraph $G(\mathbb{Z}^2, \{\sqrt{2}\})$

Beispiel 2.7. Man betrachte die ganzzahligen Distanzgraphen $G(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$ (siehe Abbildung 2.3) und $G(\mathbb{Z}, \{2, 3, 5\})$ (siehe Abbildung 2.4).

Jeder Knoten $v \in S$ von $G(S, D)$ mit $S = \mathbb{Z}$, $D \subseteq \mathbb{N}$ bzw. mit $S = \mathbb{Q}$, $D \subseteq \mathbb{Q}^+$ bzw. mit $S = \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^+$ ist zu genau 2 Knoten im Abstand $d \in D$ benachbart, nämlich zu $v - d$ und zu $v + d$. Damit ist jeder Knoten zu genau $|D|$ kleineren Knoten und zu genau $|D|$ größeren Knoten benachbart. Hieraus folgt:

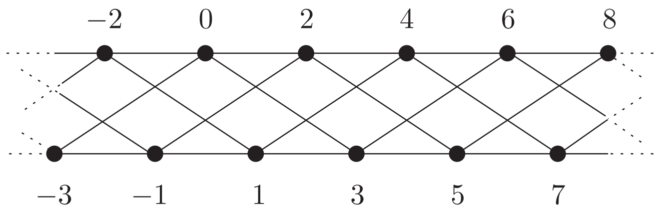

Abbildung 2.3: Der ganzzahlige Distanzgraph $G(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$

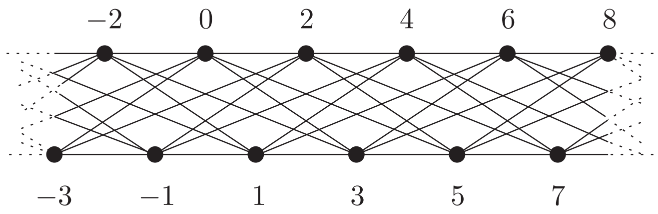

Abbildung 2.4: Der ganzzahlige Distanzgraph $G(\mathbb{Z}, \{2, 3, 5\})$

Lemma 2.8. *Die Distanzgraphen $G(\mathbb{Z}, D)$ mit $D \subseteq \mathbb{N}$, $G(\mathbb{Q}, D)$ mit $D \subseteq \mathbb{Q}^+$ und $G(\mathbb{R}, D)$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^+$ sind $2\,|D|$-regulär.*

Auch Distanzgraphen mit Knotenmengen $\mathbb{Z}^n$ (siehe zum Beispiel Abbildungen 2.1 und 2.2) sowie $\mathbb{Q}^n$ und $\mathbb{R}^n$, die im Allgemeinen einen unendlichen Maximalgrad haben, sind regulär. Dies ergibt sich unmittelbar aus der folgenden stärkeren Eigenschaft.

Definition 2.9. Ein Graph G heißt *knotentransitiv*, falls für je zwei Knoten $u, v \in V(G)$ ein Automorphismus $\phi : V(G) \to V(G)$ mit $\phi(u) = v$ existiert.

Lemma 2.10. *Distanzgraphen $G(S, D)$ mit $S = \mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ oder $\mathbb{R}^n$ sind knotentransitiv.*

Beweis. Für je zwei Knoten $u, v \in S$ ist die Abbildung $\phi : S \to S$, $\phi(x) = x - u + v$, ein Automorphismus mit $\phi(u) = v$, denn ϕ ist bijektiv und für je zwei Knoten $x, y \in S$ gilt $\|\phi(x) - \phi(y)\|_2 = \|x - u + v - (y - u + v)\|_2 = \|x - y\|_2$, woraus folgt, dass $\phi(x)$ und $\phi(y)$ genau dann benachbart sind, wenn x und y benachbart sind. □

Bemerkung 2.11. Die Definition von Distanzgraphen kann verallgemeinert werden (siehe etwa [31]), indem statt euklidischer Räume $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ beliebige metrische Räume betrachtet werden.

Definition 2.12. Sei $\mathcal{M} = (M, d)$ ein metrischer Raum mit Grundmenge M und Metrik d. Sei $S \subseteq M$, $S \neq \emptyset$, und $D \subseteq \mathbb{R}^+$. Der *Distanzgraph* $G_{\mathcal{M}}(S, D)$ ist der Graph mit Knotenmenge S und Kanten zwischen je zwei Knoten $u, v \in S$ mit $d(u, v) \in D$.

Diese Definition ist sehr allgemein gefasst, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 2.13. Sei $G = (V(G), E(G))$ ein schlichter ungerichteter Graph. Der graphentheoretische Abstand $d_G(u, v)$ zwischen zwei Knoten u, v von G bildet eine Metrik auf der Knotenmenge $V(G)$, denn für beliebige Knoten $u, v, w \in V(G)$ gilt $d_G(u, v) \geq 0$, $d_G(u, v) = 0$ genau dann, wenn $u = v$ gilt, $d_G(u, v) = d_G(v, u)$, da G ungerichtet ist, und $d_G(u, v) \leq d_G(u, w) + d_G(w, v)$, was aus der Definition des graphentheoretischen Abstands folgt.

Damit ist der Graph G isomorph zu $G_{\mathcal{M}}(V(G), \{1\})$ bezüglich des metrischen Raumes $\mathcal{M} = (V(G), d_G)$, da zwei Knoten aus $V(G)$ genau dann in G benachbart sind, wenn ihr graphentheoretischer Abstand 1 beträgt, das heißt, wenn sie in $G_{\mathcal{M}}(V(G), \{1\})$ benachbart sind.

Beispiel 2.14. Seien $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, N eine n-elementige Menge und M die Menge aller k-elementigen Teilmengen von N, $M = \binom{N}{k}$. Die Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}_0^+$ mit $d(U,V) = |U \setminus V|$ ist eine Metrik auf M, denn für $U, V, W \in M$ gilt $d(U,V) \geq 0$, $d(U,V) = 0$ genau dann, wenn $U = V$, $d(U,V) = d(V,U) = k - |U \cap V|$ und $d(U,V) \leq d(U,W) + d(W,V)$, denn $d(U,W) + d(W,V) = |U \setminus W| + |W \setminus V| = |(U \setminus W) \cup (W \setminus V)| = |(U \cup W) \setminus (W \cap V)| \geq |U \setminus V| = d(U,V)$.

Der *Kneser-Graph* $KG(n,k)$ mit $n \geq k$ ist der Graph mit der Menge $M = \binom{N}{k}$ aller k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge N als Knotenmenge, in dem zwei Knoten genau dann benachbart sind, wenn die zugehörigen Teilmengen disjunkt sind. Da genau die disjunkten Teilmengen $U, V \in M$ einen Abstand $d(U,V) = k$ zueinander haben, ist der Kneser-Graph $KG(n,k)$ isomorph zum Distanzgraphen $G_{\mathcal{M}}(M, \{k\})$ mit $\mathcal{M} = (M, d)$.

Abbildung 2.5 stellt den Kneser-Graphen $KG(5,2)$ dar, der isomorph zum Petersen-Graphen ist.

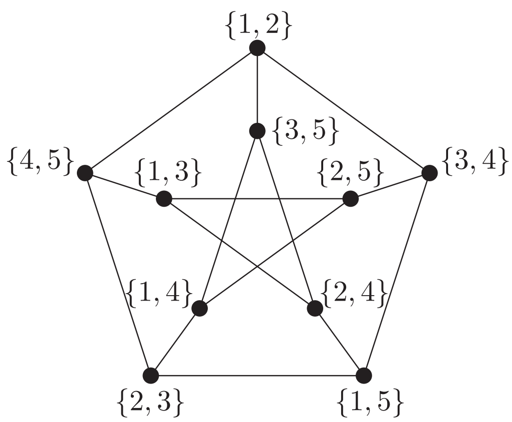

Abbildung 2.5: Der Kneser-Graph $KG(5,2)$

2.2 Zusammenhang in ganzzahligen Distanzgraphen

In diesem Abschnitt werden zusammenhängende ganzzahlige Distanzgraphen charakterisiert sowie die Knoten- und die Kantenzusammenhangszahl aller ganzzahligen Distanzgraphen bestimmt, die sich leicht aus dem besonderen Aufbau dieser Graphen ableiten lassen.

Definition 2.15. Ein Graph G heißt *zusammenhängend*, wenn es zwischen je zwei Knoten $u, v \in V(G)$ einen u-v-Weg gibt. Ein maximaler zusammenhängender Teilgraph eines Graphen G heißt *Komponente* von G.

Beispiel 2.16. Es werden ganzzahlige Distanzgraphen $G(\mathbb{Z}, \{d\})$ zu einelementigen Distanzmengen $\{d\}$ betrachtet.