1 Einleitung

Eine der grundlegenden Problemstellungen der Finanzwirtschaft ist das Treffen von Entscheidungen auf Basis von zukünftigen unsicheren Zahlungsströmen. Dazu sind in der Regel Kenntnisse über die Verteilungen und Abhängigkeitsstrukturen dieser Zahlungsströme erforderlich. Ein wichtiges Beispiel hierfür ist die Portfolio-Optimierung, also die Frage nach der optimalen Allokation eines bestimmten Vermögens auf eine Menge risikobehafteter Wertpapiere. Ein anderes Beispiel ist die Bestimmung des Markt-Betas von Wertpapieren, welches etwa für die Kapitalkostenbestimmung oder die Performance-Messung von Wertpapierportfolios große Bedeutung besitzt. Die klassische Implementierung dieser Anwendungen erfolgt zumeist auf Basis von vergangenheitsbezogenen Informationen in Form historischer Renditen. Dieses Vorgehen hat jedoch erhebliche Nachteile: Zum einen muss die Stationarität historischer Renditezeitreihen gewährleistet sein, zum anderen können selbst bei Gültigkeit der Stationaritätsannahme aufgrund kleiner Stichproben erhebliche Schätzfehler auftreten.

In dieser Arbeit wird eine fundamental andere Herangehensweise an die Bestimmung des Markt-Betas und die Parameterbestimmung für die Portfolio-Optimierung gewählt. Es werden Verteilungsinformationen aus Preisen gehandelter Optionen extrahiert, welche zumindest teilweise die Erwartungen der Marktteilnehmer über die Entwicklung der den Optionen zugrunde liegenden Basiswerte widerspiegeln. Dieser unmittelbar an den Erwartungen der Marktteilnehmer anknüpfende implizite Ansatz ist somit grundsätzlich zukunftsorientiert, was ein erhebliches Potenzial hinsichtlich der hier untersuchten Anwendungen verspricht.

Die Gewinnung impliziter Informationen aus Optionspreisen in Form der impliziten Volatilität ist ein bereits seit langem etabliertes Konzept. Dieses geht, aufbauend auf dem Bewertungsansatz von Black und Scholes (1973) und Merton (1973) (Black/Scholes-Modell), auf Latané und Rendleman (1976) zurück. Bei angenommener Gültigkeit des Black/Scholes-Modells lässt sich die implizite Volatilität allein mithilfe beobachtbarer Parameter sowie des Marktpreises der Option bestimmen.[1] In ihrer empirischen Studie

[1] Da die Black/Scholes-Formel nicht nach der Volatilität aufzulösen ist, muss die Berechnung numerisch erfolgen.

stellen Latané und Rendleman (1976) fest, dass die (Vega-gewichtete) Summe impliziter Volatilitäten, gewonnen aus Optionen mit unterschiedlichen Basispreisen, einen besseren Schätzer für die Volatilität der zukünftigen Renditen des Basiswertes darstellt als die Volatilität historischer Renditen.

Basierend auf der Arbeit von Latané und Rendleman (1976) entstand ein ganzer Literaturstrang, welcher die Eignung modellbasierter impliziter Volatilitäten zur Prognose der Volatilität der zukünftigen Renditen untersucht. So überprüft Beckers (1981) die Prognosefähigkeit einer mittleren impliziten Volatilität aus jeweils fünf at-the-money-Optionen und stellt ebenfalls eine bessere Prognosefähigkeit im Vergleich zu historischen Volatilitäten fest. Ähnlich positive Resultate berichten Swidler und Wilcox (2002) für Aktien der Finanzbranche. Canina und Figlewski (1993) hingegen kommen in einer Studie für den Standard and Poor's 100 Index im Zeitraum von 1983 bis 1986 zu dem Ergebnis, dass die implizite Volatilität der entsprechenden Indexoptionen nur sehr schlecht als Prognose der Volatilität der zukünftigen Renditen des Indexes geeignet ist. Eine Vielzahl von Studien, unter anderen Lamoureux und Lastrapes (1993) für Aktienoptionen unter Verwendung eines Optionspreismodells mit stochastischer Volatilität und Jorion (1995) für Optionen auf Währungen, kommen jedoch zu dem Ergebnis, dass die implizite Volatilität wichtige Informationen über die Volatilität der zukünftigen Renditen des Basiswertes enthält.

Eine Schwäche der vorgenannten Studien besteht jedoch darin, dass sie stets zwei Dinge simultan untersuchen. Zum einen wird die Prognosegüte der in Optionspreisen implizit enthaltenen Markterwartungen beurteilt, zum anderen werden die Gültigkeit des zur Bestimmung der impliziten Volatilität unterstellten Optionspreismodells und dessen Annahmen untersucht. Diese Tatsache erschwert in der Konsequenz die Interpretation der Ergebnisse, da eine schlechte Prognosegüte sowohl aus der unzureichenden Fähigkeit der Marktteilnehmer, die zukünftige Marktentwicklung zu antizipieren, resultieren kann als auch schlicht der Tatsache geschuldet sein kann, dass die Marktteilnehmer ein anderes als das unterstellte Bewertungsmodell verwenden.

Um das Problem der Modellabhängigkeit impliziter Informationen zu lösen, entwickeln Breeden und Litzenberger (1978) einen modellfreien Ansatz, mit dem nicht nur ein einzelnes Moment, die implizite Volatilität, sondern die gesamte implizite Aktienkursverteilung aus einer Sequenz von Optionspreisen bestimmt werden kann. Britten-Jones und Neuberger (2000) leiten aufbauend auf dieser Arbeit eine modellfreie implizite Volatilität her, d. h. im Gegensatz zu den vorherigen Ansätzen, welche die implizite Volatilität als

Parameter eines spezifischen Bewertungsmodells bestimmen, wird hier eine allgemeinere modellunabhängige implizite Volatilität entwickelt. Jiang und Tian (2005) erweitern die Methodik von Britten-Jones und Neuberger (2000) um die Möglichkeit von Sprüngen und stellen in einer anschließenden empirischen Studie fest, dass die resultierende modellfreie implizite Volatilität bessere Prognosen der Volatilität der zukünftigen Renditen liefert als die historische und die implizite Volatilität nach Black und Scholes (1973). Bakshi, Kapadia und Madan (2003) entwickeln einen alternativen modellfreien Ansatz, der nicht nur die Bestimmung der Varianz, sondern zusätzlich der höheren Momente Schiefe und Kurtosis der impliziten Renditeverteilung des Basiswertes direkt aus einer Sequenz von Optionspreisen ermöglicht.[2]

Aufgrund der guten empirischen Ergebnisse hat sich die Verwendung impliziter Informationen als Markterwartung bzgl. zukünftiger Renditen etabliert.[3] So existieren gegenwärtig zahlreiche Indizes impliziter Volatilitäten wie der VIX der Chicago Board Options Exchange oder der VDAX-NEW der Deutschen Börse AG, welche als Stimmungsbarometer für die mittelfristige zukünftige Marktentwicklung gelten.

Die wesentliche Fragestellung dieser Arbeit lautet, ob die in zahlreichen Studien nachgewiesene hohe Prognosefähigkeit impliziter Informationen es ermöglicht, die genannten Probleme in der Umsetzung der Beta-Bestimmung und der Portfolio-Optimierung zu vermeiden. Dazu entwickelt die vorliegende Arbeit eine Klasse von Schätzern für das Markt-Beta, welche vollständig aus impliziten Informationen eines aktuellen Querschnitts der Marktpreise von plain-vanilla-Optionen berechnet werden können. Darauf aufbauend werden Schätzer für die zur Portfolio-Optimierung benötigte Kovarianzmatrix und den Vektor der erwarteten Renditen ebenfalls auf Basis rein impliziter Informationen entwickelt. Grundsätzlich benötigen solche impliziten Schätzer neben den Varianzen der einzelnen Wertpapiere, die relativ einfach implizit aus Preisen von plain-vanilla-Optionen bestimmt werden können, auch Korrelationen der Wertpapiere untereinander. Diese hingegen können nicht implizit aus Optionspreisen bestimmt werden, da kein flächendeckender Handel von Derivaten, die von der Korrelation zweier Basiswerte abhängen, wie bspw. Austauschoptionen, existiert. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit ein anderes Vorgehen verfolgt, welches es unter Verwendung spezifischer Annahmen und

[2] Ein ausführlicher Überblick über die Entwicklung existierender Untersuchungen der Prognosegüte der impliziten Volatilität ist bspw. in Poon und Granger (2003), Jiang und Tian (2005) oder Christoffersen, Jacobs und Chang (2011) zu finden.

[3] Vgl. bspw. Whaley (2000, S. 17).

eines Marktindexes doch ermöglicht, die benötigten Korrelationen aus einer Sequenz von plain-vanilla-Optionspreisen zu extrahieren. Die Klasse der entwickelten Schätzer umfasst dabei jeweils drei verschiedene Möglichkeiten zur Identifikation des Betas und somit der Kovarianzmatrix und des Vektors der erwarteten Renditen, welche zentral auf der impliziten Varianz, der impliziten Schiefe oder der impliziten Kurtosis basieren. In der Entwicklung dieser impliziten Ansätze zur Umsetzung von Portfolio-Optimierung und Beta-Bestimmung liegt der wesentliche theoretische Beitrag der Arbeit. Der wesentliche empirische Beitrag liegt in der ausführlichen empirischen Prüfung der entwickelten Ansätze.

Die Arbeit ist in sechs Kapitel gegliedert. In Kapitel 2 erfolgt die Darstellung der für die Arbeit notwendigen Grundlagen der Portfoliotheorie nach Markowitz und des auf deren Erkenntnissen basierenden Beta-Faktors im Ein-Faktor-Modell und Capital Asset Pricing Modell. Das Kapitel beschreibt des Weiteren die traditionelle Umsetzung der Portfolio-Optimierung und der Beta-Bestimmung basierend auf Stichprobenschätzern historischer Renditen und die damit einhergehende Problematik von Schätzfehlern und der fehlenden Stationarität in den Daten. Abschließend stellt das Kapitel alternative Verfahren der Portfolio-Optimierung und der Beta-Bestimmung vor, welche versuchen, die vorher beschriebenen Probleme der Umsetzung zu verringern.

Das dritte Kapitel widmet sich der Darstellung und Erläuterung der theoretischen Grundlagen der modellfreien Bestimmung der impliziten Aktienkursverteilung nach Breeden und Litzenberger (1978) und der modellfreien Bestimmung der Momente der impliziten Renditeverteilung aus Optionspreisen nach Bakshi, Kapadia und Madan (2003). Daran schließt sich jeweils ein Abschnitt an, welcher einen Überblick über die bereits bestehenden Ansätze zur Verwendung impliziter Informationen in der Beta-Bestimmung bzw. in der Portfolio-Optimierung gibt. Abschnitt 3.4 enthält schließlich die Herleitung des theoretischen Hauptbeitrags der Arbeit, der Identifikation des Beta-Faktors und der Kovarianzmatrix auf Basis rein impliziter Informationen. Abschließend erfolgt die Darstellung der mit verschiedenen Identifikationen einhergehenden Modellimplikationen.

Kapitel 4 und 5 enthalten die empirischen Beiträge der Arbeit in Form von Out-Of-Sample-Studien zur Evaluierung der in Kapitel 3 vorgestellten neuen Ansätze zur Verwendung impliziter Informationen in der Portfolio-Optimierung und Beta-Bestimmung. Das vierte Kapitel untersucht die Prognosequalität der neu vorgestellten impliziten Betas im Vergleich zu traditionellen Methoden der Beta-Bestimmung. Das fünfte Kapitel enthält eine Performanceanalyse traditioneller Ansätze im Vergleich zu den in der Arbeit vorgestellten impliziten Verfahren der Portfolio-Optimierung.

Die Arbeit schließt mit dem sechsten Kapitel, welches die Schlussbetrachtung und einen Ausblick auf mögliche weiterführende Entwicklungen und Erweiterungen der Arbeit enthält.

2 Grundlagen der Portfolio-Optimierung und Beta-Bestimmung

2.1 Portfolio-Optimierung

2.1.1 Die Portfoliotheorie nach Markowitz

Eines der grundlegenden ökonomischen Probleme im Bereich der Finanzwirtschaft ist die optimale Aufteilung eines investierbaren Vermögens auf eine Menge verfügbarer risikobehafteter Wertpapiere. Mit Markowitz' (1952) Arbeit wurde der Grundstein für die Beantwortung dieser ökonomischen Fragestellung und damit zur sog. modernen Portfoliotheorie gelegt. Markowitz beschreibt den Vorgang der Portfolioauswahl – die Zusammenstellung verschiedener Wertpapiere zu einem Portfolio – als einen zweistufigen Prozess. Die erste Stufe besteht aus der Erwartungsbildung des Investors über die zukünftige Entwicklung der Wertpapierrenditen. Die zweite Stufe umfasst die Zusammenstellung der verfügbaren Wertpapiere auf Grundlage der gebildeten Erwartungen und unter Berücksichtigung der persönlichen Präferenzen des Investors. Der aktuelle Abschnitt 2.1 beschäftigt sich inhaltlich mit der zweiten Stufe der Portfolioauswahl. Auf die erste Stufe – die Erwartungsbildung – wird dann in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels eingegangen.

Markowitz argumentiert, dass eine Regel, bei der sich Investoren nur an der Maximierung der Rendite ihres Portfolios orientieren, nicht zu Diversifikation führt. So würde das Portfolio jedes Investors aus lediglich einem einzigen Wertpapier – dem mit der maximalen erwarteten Rendite – bestehen. Alternativ schlägt Markowitz eine Investmentregel vor, wonach ein Investor sich simultan am Ewartungswert μ_P und der Varianz σ_P^2 der Rendite seines Portfolios orientieren sollte.

Um auf Portfolioebene die Varianz und den Erwartungswert der Rendite aus den Renditen der einzelnen Wertpapiere bestimmen zu können, hat Markowitz zunächst analytisch diese Aggregation in Abhängigkeit der Wertpapiergewichte dargestellt. In seiner Arbeit leitet er anschließend auf Grundlage von Dominanzüberlegungen den sog. *effizienten*

Rand (eng.: „efficient frontier“) her, auf dem sämtliche μ-σ-effizienten Portfolios liegen. Ein Portfolio ist genau dann μ-σ-effizient, wenn kein weiteres Portfolio mit gleichem Erwartungswert aber geringerer Varianz der Rendite existiert. Anders formuliert ist ein Portfolio μ-σ-effizient, wenn kein weiteres Portfolio mit gleicher Varianz aber einem höheren Erwartungswert der Rendite existiert. Wird dieses Effizienzkriterium über alle realisierbaren Erwartungswerte der Renditen angewendet, ergibt sich genau der effiziente Rand mit allen μ-σ-effizienten Wertpapierkombinationen. Abschließend ist es nun möglich, eine dieser Kombinationen entsprechend den Präferenzen des Investors auszuwählen.

Ohne genauer darauf einzugehen, hat Markowitz weiterhin darauf hingewiesen, dass das Portfolio mit der höchsten erwarteten Rendite nicht zwingend die geringst möglichste Varianz im Sinne der μ-σ-Effizienz aufweist, sondern Erwartungswert und Varianz in einem gegenläufigen Verhältnis zueinander stehen. Ein Anleger muss letztlich zwischen Erwartungswert und Varianz der Rendite seines Portfolios abwägen.

2.1.2 Erwartete Renditen und Varianzen im Portfoliokontext

Für einen Investor ist nicht der Erwartungswert und die Varianz der Rendite auf der Stufe jedes einzelnen Wertpapiers in seinem Portfolio relevant, sondern aggregiert auf Portfolioebene unter Berücksichtigung potentieller Diversifikationseffekte. Zu diesem Zweck wird im Folgenden dargestellt, wie diese Aggregation unter Verwendung der Kovarianzen bzw. Korrelationen der Renditen der Wertpapiere untereinander erfolgt.

Erwartete Rendite eines Portfolios

Der Erwartungswert μ_P der Portfoliorendite R_P eines beliebigen Portfolios P, bestehend aus N Wertpapieren, lässt sich wie folgt bestimmen:[4]

$$\begin{aligned} \mu_P &= E(R_P) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \; E(R_i) \\ &\text{oder in Vektor-Schreibweise} \\ \mu_P &= \omega' \; \mu. \end{aligned} \tag{2.1}$$

[4] Vgl. Markowitz (1952, S. 81) oder Markowitz (1987, S. 4).

$\omega \in \mathbb{R}^N$ bezeichnet einen Spaltenvektor der Länge N der Gewichte der einzelnen Wertpapiere im Portfolio, $\mu \in \mathbb{R}^N$ ist der Spaltenvektor der Erwartungswerte der Portfoliorenditen mit Länge N. ω_i und μ_i entsprechen dem i-ten Eintrag des Gewichtevektors bzw. des Vektors der Erwartungswerte der Renditen. Die erwartete Portfoliorendite entspricht also der Summe der mit ihrem Anteil im Portfolio gewichteten einzelnen erwarteten Wertpapierrenditen.

Renditevarianz eines Portfolios

Die Varianz σ_P^2 der Portfoliorendite R_P eines beliebigen Portfolios P ergibt sich folgendermaßen:[5]

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= Var(R_P) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \omega_i\, \omega_j\, Cov(R_i,\, R_j) \\ &\quad \text{oder in Matrix-Schreibweise} \\ \sigma_P^2 &= \omega'\, \Sigma\, \omega. \end{aligned} \tag{2.2}$$

$\Sigma \in \mathbb{R}^{N \times N}$ entspricht der Kovarianzmatrix der Wertpapierrenditen, $Cov(R_i,\, R_j)$ bezeichnet die Kovarianz der Renditen der Wertpapiere i und j bzw. für $i = j$ die Varianz der Rendite von Wertpapier i. Wie aus Gleichung (2.2) hervorgeht, entspricht die Varianz der Portfoliorendite nicht einfach der gewichteten Summe der Einzelvarianzen.

2.1.3 Rendite-Risiko-Effizienz und analytische Bestimmung der Portfoliogewichte

Abbildung 2.1 zeigt schematisch die von einer Parabel begrenzte graue Fläche aller realisierbaren μ-σ-Kombinationen. Ausgehend von einem beliebigen Portfolio innerhalb dieser Fläche lässt sich stets eine andere Portfoliokombination mit einem geringeren Risiko σ bei gleicher erwarteter Rendite μ bilden. Abbildung 2.1 zeigt beispielhaft anhand von vier Portfolios aus der Menge der möglichen Portfolios, dass zu jedem dieser Portfolios ein dominantes – μ-σ-effizientes – Portfolio mit gleicher erwarteter Rendite μ, jedoch geringerem Risiko σ existiert.[6]

[5] Vgl. Markowitz (1952, S. 81).

[6] Wird der effiziente Rand über das μ-σ-Dominanzargument abgeleitet, handelt es sich zunächst um ein Konstrukt ohne nutzentheoretisch fundierte Bedeutung. Es lässt sich auf zwei verschiedene Arten

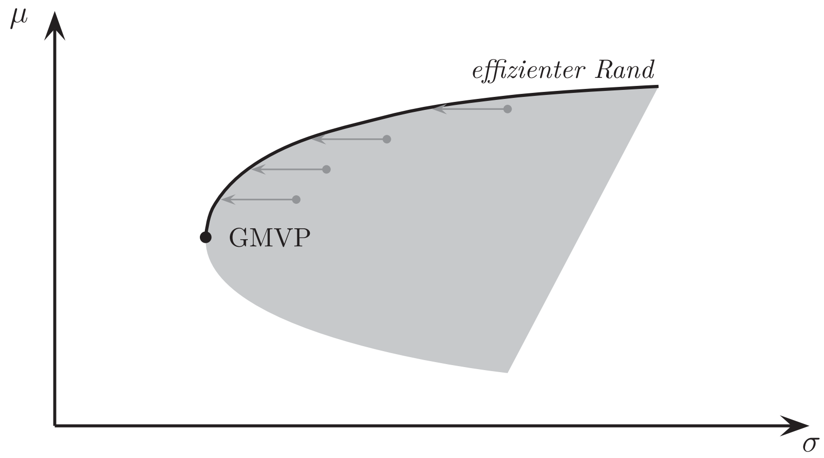

Abbildung 2.1: Schematische Darstellung der Menge aller möglichen Portfolios und des effizienten Randes (ohne Möglichkeit der risikofreien Anlage). Zusätzlich ist das Portfolio mit der minimalen Varianz aller realisierbaren Portfolios, das globale Minimum-Varianz-Portfolio (GMVP), abgebildet.

Effizienter Rand – ohne risikofreies Wertpapier

Analytisch kann der *effiziente Rand* als Minimierung der Portfoliovarianz σ_P^2 über alle Erwartungswerte μ_P ausgedrückt werden. Das Optimierungsproblem zur Bestimmung der optimalen Gewichte kann dargestellt werden als:

$$\begin{aligned} &\arg\min_{\omega} \sigma_P^2 = \arg\min_{\omega} \omega' \, \Sigma \, \omega \\ \text{u.d.B.}: \quad &\mu_P = \omega' \, \mu \\ &\omega' \, e = 1, \end{aligned} \tag{2.3}$$

mit e als Spaltenvektor der Länge N, bei dem jeder Eintrag eins beträgt. Die zweite Nebenbedingung dient dazu, sicherzustellen, dass die Summe der Portfoliogewichte eins

sicherstellen, dass das beschriebene μ-σ-Prinzip kompatibel ist mit dem ökonomischen Konzept der Erwartungsnutzentheorie, wobei jeder rationale Investor versucht, seinen erwarteten Nutzen durch seine Investitionsentscheidung zu maximieren. Zum einen kann das durch den Investor aus seiner Investitionsentscheidung resultierende konsumierbare Vermögen am Ende der Betrachtungsperiode als normalverteilt angenommen werden; zum anderen kann die spezielle Klasse der quadratischen Nutzenfunktionen für den betrachteten Investor unterstellt werden. Eine detailliertere Darstellung des Zusammenhangs von Nutzentheorie und dem μ-σ-Prinzip ist in Rudolf (1994, S. 5 f.) und in Memmel (2004, S. 5 ff.) zu finden.

beträgt. Merton (1972) hat gezeigt, dass der effiziente Rand durch die folgende Funktion gegeben ist:

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{d}\left(c\mu_P^2 - 2\,b\mu_P + a\right) \tag{2.4}$$

mit

$$a = \mu'\,\Sigma^{-1}\,\mu \quad b = \mu'\,\Sigma^{-1}\,e \quad c = e'\,\Sigma^{-1}\,e \quad d = ac - b^2. \tag{2.5}$$

Σ^{-1} bezeichnet in diesem Zusammenhang die Inverse der Kovarianzmatrix Σ. Die optimalen Portfoliogewichte ω der einzelnen Wertpapiere können wie folgt bestimmt werden Merton (1972, S. 1845):

$$\omega = \frac{\Sigma^{-1}\,(c\mu - be)\,\mu_P + \Sigma^{-1}\,(ae - b\mu)}{d}. \tag{2.6}$$

Das globale Minimum-Varianz-Portfolio (GMVP)

Ein besonderes Portfolio aus der Menge der μ-σ-effizienten Portfolios ist das Portfolio mit der geringsten Varianz, das sog. *globale Minimum-Varianz-Portfolio* (GMVP). Analytisch ist die Herleitung des GMVP die Lösung des Problems der Minimierung der Portfoliovarianz σ_P^2. Das entsprechende Optimierungsproblem lässt sich darstellen als:

$$\begin{aligned} &\arg\min_{\omega}\,\sigma_P^2 = \arg\min_{\omega}\,\omega'\,\Sigma\,\omega \\ &\text{u.d.B.}: \qquad \omega'\,e = 1. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Die analytische Lösung dieses Problems und folglich der Vektor ω_{GMVP} der Portfoliogewichte des GMVP kann folgendermaßen bestimmt werden[7]:

$$\omega_{GMVP} = \frac{\Sigma^{-1}e}{e'\Sigma^{-1}e}. \tag{2.8}$$

Effizienter Rand – mit risikofreiem Wertpapier

Eröffnet man nun die Möglichkeit, zusätzlich in ein risikofreies Wertpapier mit erwarteter Rendite r_f und $\sigma_{r_f} = 0$ zu investieren, vergrößert sich die Menge aller möglichen μ-σ-Kombinationen und ergibt nun die in Abbildung 2.2 dargestellte graue Fläche, welche

[7] Vgl. z. B. Kempf und Memmel (2006, S. 334).

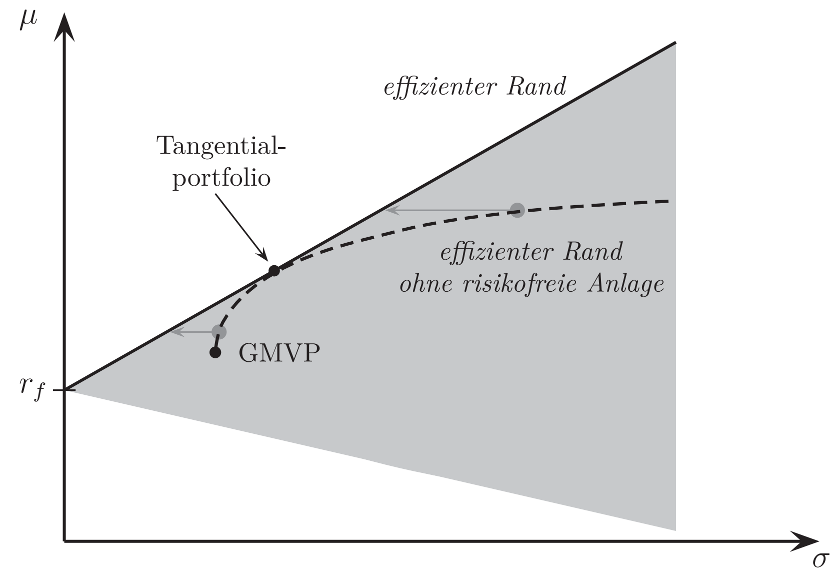

Abbildung 2.2: Schematische Darstellung der Menge aller möglichen μ-σ-Kombinationen und des *effizienten Randes* mit risikofreier Anlage.

durch zwei Geraden, die durch den Punkt ($\sigma = 0$, $\mu = r_f$) verlaufen, begrenzt wird. Es lässt sich nun leicht erkennen (beispielhaft veranschaulicht anhand zweier durch dunkelgraue Punkte dargestellte Beispielportfolios), dass fast alle Portfolios auf dem ursprünglichen effizienten Rand durch ein Portfolio mit gleicher erwarteten Rendite μ, jedoch geringerem Risiko σ dominiert werden. Es ergibt sich somit ein neuer effizienter Rand, welcher die Tangente an den ursprünglichen effizienten Rand bildet und durch den Punkt ($\sigma = 0$, $\mu = r_f$) verläuft. Eine besondere Eigenschaft dieses effizienten Randes ist die Tatsache, dass sich nun alle Portfolios auf einer Geraden befinden und sich lediglich aus dem risikofreien Wertpapier und dem sog. *Tangentialportfolio* zusammensetzen.[8]

[8] Der Vorgang der präferenzabhängigen Investition in risikobehaftete Wertpapiere teilt sich dadurch in zwei Schritte auf. Zunächst entscheidet sich ein Investor für eine Investition in das Tangentialportfolio. Anschließend erfolgt präferenzabhängig die Aufteilung des verfügbaren Vermögens auf die risikofreie Anlage und das Tangentialportfolio. Der Beweis dieses als *Tobin-Separation* bekannten Ergebnisses wurde erstmals in Tobin (1958, S. 82 ff.) vorgestellt, wobei hier lediglich die Möglichkeit des Haltens von Bargeld ($r_f = 0$) betrachtet wurde.

Das Tangentialportfolio

Das Optimierungsproblem (2.3) zur Bestimmung der Gewichte des varianzminimalen Portfolios vereinfacht sich durch die Erweiterung des Modells um eine risikofreie Anlage zu:

$$\begin{aligned} \arg\min_{\omega} \sigma_P^2 &= \arg\min_{\omega} \omega' \, \Sigma \, \omega \\ \text{u.d.B.}: \qquad \mu_P &= r_f + \omega' \, (\mu - r_f \, e). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Die Nebenbedingung $\omega' \; e = 1$ kann entfallen, da sich die Wertpapiergewichte nicht mehr zu eins addieren müssen.[9] Als allgemeine Lösung des Lagrangeansatzes für o. g. Optimierungsproblem ergibt sich[10]

$$\omega = \frac{1}{2}\lambda\Sigma^{-1}(\mu - r_f \, e) \tag{2.10}$$

als die Menge aller μ-σ-effizienten Portfolios. λ bezeichnet dabei den Lagrange-Multiplikator. Das Tangentialportfolio ist nun genau das Portfolio, bei dem sich die Gewichte in den Aktien zu eins aufaddieren und welches folglich vollständig aus Aktien besteht:[11]

$$\omega_{TP} = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r_f \, e)}{e' \, \Sigma^{-1}(\mu - r_f \, e)}. \tag{2.11}$$

Leerverkaufsbeschränkung

Unter der Restriktion eines Leerverkaufsverbotes, was einer Nichtnegativitäts-Nebenbedingung in den genannten Optimierungsproblemen entspricht, werden (2.3) und (2.9) um die Nebenbedingungen

$$\omega_i \geq 0 \quad , i = 1, \ldots, N \tag{2.12}$$

ergänzt. Aufgrund der Nichtnegativitätsbedingung ist es nicht ohne Weiteres möglich, die Lösung für das Optimierungsproblem, z. B. unter Verwendung des Lagrange-Ansatzes, in geschlossener Form zu finden. Das Problem kann beispielsweise mit Hilfe eines quadrati-

[9] Die Bedingung muss nun für die Gewichte der risikobehafteten plus dem Gewicht des risikofreien Wertpapiers gelten. Dies liegt darin begründet, dass Investitionen in Wertpapiere, welche über das Vermögen hinaus gehen und folglich zu einer Summe der Wertpapiergewichte größer als eins führen, durch Kreditaufnahme zum risikofreien Zins finanziert werden können.

[10] Vgl. Memmel (2004, S. 14).

[11] Vgl. Memmel (2004, S. 14), Rudolf (1994, S. 10) oder Feldman und Reisman (2003, S. 255).

schen Programms, für welches eine Vielzahl verschiedener iterativer Lösungsalgorithmen existieren, gelöst werden.[12] Aufgrund der Allgemeinheit dieser Algorithmen ist die Effektivität bei der Lösung des beschriebenen Portfolioproblems jedoch begrenzt.[13] Speziell für die Lösung von Portfolioproblemen hat Markowitz (1956) den *critical line algorithm* (CLA) vorgeschlagen, welcher sehr effizient mit wenigen Iterationen zur Lösung führt. Von einer detaillierten Darstellung des CLA wird im Rahmen dieser Arbeit abgesehen.[14]

Parameteranforderungen

Um die theoretischen Erkenntnisse der Portfolio-Optimierung umzusetzten, werden entweder alle oder zumindest einige der Inputparameter Kovarianzmatrix Σ und Vektor der erwarteten Renditen μ benötigt. Markowitz (1952) spricht in diesem Zusammenhang von der ersten Stufe des Prozesses der Portfolioauswahl, thematisiert diese jedoch nicht weiter in seiner Arbeit. Da diese Parameter zukunftsorientiert sind, handelt es sich letztlich um eine Erwartungsbildung über diese Parameter für das gesamte Anlageuniversum und den zeitlichen Anlagehorizont eines Investors. Wie genau diese Parameter in der klassischen historischen Implementierung bestimmt werden können und welchen Problemen die Schätzung der Parameter unterliegt, ist Gegenstand des Abschnitts 2.3. Wie diese Parameter aus impliziten Informationen aus Optionspreisen gewonnen werden können, um möglicherweise bessere Informationen bzgl. der zukünftigen Renditeentwicklungen am Markt zu erhalten, ist Gegenstand des Kapitels 3.

2.2 Capital Asset Pricing Modell und Beta-Faktor

2.2.1 Capital Asset Pricing Modell

Basierend auf dem in der Arbeit von Markowitz (1952) unterstellten Verhalten von Investoren und der Möglichkeit einer risikofreien Kapitalanlage und -aufnahme haben

[12] Vgl. bspw. Goldfarb und Idnani (1983) oder Li und Swetits (1997).

[13] Die exisitierenden iterativen Lösungsverfahren unterscheiden sich unter anderem in der Effizienz und numerischen Stabilität bei der Lösung der quadratischen Programme. Für viele Mathematik- und Statistikprogramme wie z. B. MATLAB oder R (*quadprog*-Paket) sind Implementationen für die numerische Lösung der quadratischen Programme verfügbar.

[14] Sehr detaillierte Darstellungen des CLA sind unter anderem in Rudolf (1994, S. 14 ff.), Schmidt-von Rhein (1996, S. 248 ff.), Sharpe (1963, S. 279 ff.) oder in der Originalarbeit Markowitz (1956) zu finden.