0 Einleitung

Sei mit

$$B := \{w = (u,v) \in \mathbb{C} : \ |w| < 1\}$$

die offene Einheitskreisscheibe in der komplexen Ebene bezeichnet. Auf deren Rand geben wir eine endliche Anzahl $m \geq 3$ von Punkten $e^{i\tau_j}$ vor, welche wir gemäß

$$0 \leq \tau_1 < \ldots < \tau_m < 2\pi$$

angeordnet voraussetzen. Wir geben ferner im d-dimensionalen reellen Raum dieselbe Anzahl m von Punkten $Q^{(j)} \in \mathbb{R}^d$ vor. Die Aufgabe des Marx-Shiffman'schen Variationsproblems besteht nun darin, unter all jenen Vektorfunktionen

$$y\colon B \longrightarrow \mathbb{R}^d \quad \text{mit} \quad y \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B}),$$

welche für $j = 1, \ldots, m$ jeweils das Kreisbogenstück zwischen $e^{i\tau_{j-1}}$ und $e^{i\tau_j}$ auf die Gerade durch $Q^{(j-1)}$ und $Q^{(j)}$ abbilden, diejenige herauszufinden, welche minimales Dirichlet-Integral

$$D(y) = D_B(y) := \iint\limits_{(u,v)\in B} |y_u(u,v)|^2 + |y_v(u,v)|^2 \, dudv \tag{1}$$

besitzt. Eine Lösung dieses Problems nennen wir Marx-Shiffman'schen Minimalvektor. Erhard Heinz löst dieses Problem in [H] mittels direkter Variationsmethoden im Zusammenhang mit einem gewissen elliptischen Randwertproblem, welches wir das Heinz'sche Randwertproblem nennen. Für eine präzise Definition der Probleme von Marx-Shiffman und Heinz verweisen wir auf die Definition 89 im Kapitel 4. Durch den Zusammenhang zwischen Variations- und Randwertproblem gelingt es Heinz in [H], tiefliegende Aussagen vor allem über die Parameterabhängigkeit der Marx-Shiffman'schen Minimalvektoren zu beweisen. Dabei taucht ein weiteres bedeutendes Problem auf, welches als das Riemann'sche Problem der Funktionentheorie bekannt ist. In der Tat zeigt Heinz in [H], dass die Wirtinger-Ableitung einer ins Außengebiet gespiegelten Heinz-Lösung x ein gewisses Riemann'sches Problem löst, auf das wir weiter unten in dieser Einleitung näher eingehen, bevor wir uns im Kapitel 3 ausführlich diesem Problem widmen. Das Riemann'sche Problem wurde von Josip Plemelj in der klassischen Arbeit [P] weitgehend vollständig mit Ansätzen behandelt, die auf David Hilbert zurückgehen und auf ein lineares Integralgleichungssystem zweiter Art führen. Wir verwenden diesen Zusammenhang schließlich, um einen Integralgleichungszugang zu den Marx-Shiffman'schen Minimalvektoren zu etablieren. Dafür werden wir uns ausführlich mit dem Riemann'schen Problem der Funktionentheorie befassen, was für sich bereits eine hochlohnende Angelegenheit ist.

Die ersten beiden Kapitel dieser Arbeit dienen der Vorbereitung und sind aus den Erfordernissen des Hauptkapitels entstanden. In Kapitel 1 bringen wir die Sätze und Bezeichnungsweisen aus der Funktionentheorie in einer Veränderlichen zusammen, von denen wir im Laufe der Arbeit Gebrauch machen werden, insbesondere über die Laurent-Reihenentwicklung holomorpher Funktionen und Aussagen über die Größe der Konvergenzradien von Haupt- und Nebenteil (Abschnitt 1.1 und 1.2). Im Abschnitt 1.4 über die

Darstellung holomorpher Funktionen durch ihre Randwerte (Satz 20) taucht bei der Darstellung holomorpher Außenfunktionen f eines Gebiets G durch ihre Randwerte der vom Autor sogenannte Hauptteiloperator $\mathrm{X}_{\mathbb{C}}^{+} f$ aus (33) auf, welcher im Abschnitt 3.4 über die Integralgleichungsmethode zur Lösung des Hilbert-Plemelj-Problems eine Rolle spielen wird. Wichtig ist auch der Abschnitt 1.5 über die Randwerte des Cauchy-Integrals (Satz 21), der nicht unbedingt zum Standard einer Vorlesung über Funktionentheorie gehört. Satz 21 wurde erstmalig von Josip Plemelj in [P2] zur Vorbereitung seiner Arbeit [P] über das Riemann'sche Problem gezeigt und finden wir auch in [S2]. Ferner führen wir in Abschnitt 1.3 das Linienwertkonzept ein, welches sich durch das gesamte Hauptkapitel (Kapitel 3) zieht.

Die Quintessenz des Kapitels 2 ist ein Auflösbarkeitssatz für Fredholm'sche Integralgleichungssysteme über einer (geschlossenen) Kurve in der komplexen Ebene (Satz 45 bzw. Satz 46). Wir erhalten diese Sätze durch Anwendung einer abstrakten Lösbarkeitstheorie für Operatorenpaare (L, L') auf einem Banachraum $(B, \|\cdot\|, b)$ mit einer symmetrischen Bilinearform b als zusätzlicher algebraischer Struktur. Das Paar (L, L') der Operatoren auf B muss dabei b-geometrisch kompakt (eine vom Autor gewählte Bezeichnung) sein im Sinne von Definition 38. Für solche Paare gilt insbesondere

$$b(Lu, v) = b(u, L'v).$$

Der abstrakte Teil von Kapitel 2 mündet schließlich in den Satz 39, welcher besagt, dass die Fredholm-Gleichung

$$(I - L)u = v$$

genau dann eine Lösung u besitzt, wenn für alle Lösungen w der homogenen Gleichung

$$(I - L')w = 0,$$

welche in ihrer Gesamtheit einen endlichdimensionalen Unterraum bilden, die Relation

$$b(w, v) = 0$$

richtig ist. Dies ist ein typischer Satz in Form einer Fredholm-Alternative, hier allerdings nicht im Hilbertraum mit seinem hermiteschen Skalarprodukt, sondern in einem komplexen Banachraum mit symmetrischer Bilinearform. Man findet ähnlich anmutende Aussagen auch in manchen Büchern über Funktionalanalysis (z.B. [Heu]).

Im letzten Abschnitt 2.6 betrachten wir den konkreten Banachraum, der von der Menge der stetigen komplexen Vektorfunktionen auf einer regulären C^1-Kurve W in der komplexen Ebene und der Supremumsnorm gebildet wird, und statten diesen zusätzlich mit der symmetrischen Bilinearform

$$b(f, g) := \int\limits_{z \in W} f(z)^T \cdot g(z)\, dz$$

aus. Wenn nun K ein stetiger Matrixkern und $K^\dagger$ dessen gemäß (80) transponierter Kern sind, so stellen sich das Paar der zugehörigen Integraloperatoren

$$(\textstyle\int_W K, \int_W K^\dagger)$$

gemäß (75) als b-geometrisch kompakt heraus. Der Lösbarkeitssatz 45 erweist sich dann als Spezialfall von Satz 39. Mit Satz 45 wird es in Kapitel 3 gelingen, den Zusammenhang von Hilbert-Plemelj- und Fredholm-Lösungen aufzuzeigen sowie die Existenz nichttrivialer Lösungen des Hilbert-Plemelj-Problems und des Riemann'schen Problems nachzuweisen.

Das Hauptkapitel dieser Arbeit ist das Kapitel 3 über ein klassisches funktionentheoretisches Problem. Mit den Ideen David Hilberts und Josip Plemeljs behandeln wir dort das Riemann'sche Problem und folgen dem Pfad, den Plemelj in der Arbeit [P] von 1908 eingeschlagen hat. [P] selbst ist eine Vereinfachung einer Arbeit Hilberts über das funktionentheoretische Riemann'sche Problem in den Göttinger Nachrichten von 1905, die man im Kapitel zehn des Bandes [Hil] finden kann. Wir geben hier eine präzisere, z.T. erheblich erweiterte Neufassung der alten Ideen.

Das Riemann'sche Problem zu einem festen beschränkten Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ verlangt nach holomorphen vektorwertigen Innen- und Außenfunktionen, deren Randwerte auf den Bögen $c_j \subset \partial G$ zwischen einer endlichen Zahl $m \in \mathbb{N}$ singulärer Punkte

$$\zeta_1, \ldots, \zeta_m \in \partial G$$

jeweils durch Multiplikation mit einer jedem Bogen c_j zugeordneten konstanten, nichtsingulären Matrix $U^{(j)} \in \mathbb{C}^{d \times d}$ ineinander übergehen. Eine präzise Fassung des Riemann'schen Problems geben wir in Definition 49. Der Ursprung dieses Problems liegt in der Theorie der linearen gewöhnlichen Differentialgleichungssysteme in einer komplexen Variablen und der Aufgabe begründet, ein Differentialgleichungssystem zu finden, dessen Lösungen ein vorgegebenes Verzweigungsverhalten aufweisen. Den Ursprung des Problems lassen wir jedoch unberührt. Für uns wird eine Riemann-Lösung eine holomorphe Außenfunktion des Gebiets G sein, zu der eine entsprechende Innenfunktion existiert, so dass die gewünschten Übergangsrelationen erfüllt sind. Dies ist sinnvoll, da die mit der Außenfunktion korrespondierende Innenfunktion eindeutig bestimmt ist. Wir verwenden die Außenfunktion als Lösungsrepräsentantin, da das Verhalten der Lösungen im unendlich fernen Punkt eine bedeutende Rolle spielen wird, welches mit der Innenfunktion schwer zu rekonstruieren ist. Sämtliche Lösungen eines festen Riemann'schen Problems werden wir in der Menge

$$\mathrm{Rie}_G(\zeta, U)$$

zusammenfassen. Diese Menge wird sich als Vektorraum mit gewissen weiteren Eigenschaften herausstellen (Satz 55). Plemelj verlangt C^1-Regularität von G. Uns genügt es, wenn ∂G regulär ist außerhalb der Punkte $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$, auf denen die Übergangssubstitutionen wechseln.

Im Abschnitt 3.2 stellen wir ein dem Riemann'schen ähnliches Problem, welches wir hier als das Hilbert-Plemelj-Problem bezeichnen, nicht zuletzt auch um es vom Riemann'schen Problem zu unterscheiden, da bei aller Gemeinsamkeit auch gravierende Unterschiede zwischen beiden bestehen. Die Bezeichnung als Hilbert-Plemelj-Problem ist historisch auch durchaus vertretbar, da Hilbert und Plemelj bedeutende Beiträge zu dessen Behandlung geleistet haben. Das Hilbert-Plemelj-Problem sucht ebenfalls nach holomorphen Innen- und Außenfunktionen eines Gebiets G, im Unterschied zum Riemann'schen Problem sollen deren Randwerte jedoch durch eine auf ∂G variierende Matrixfunktion

$$A \colon \partial G \longrightarrow \mathbb{C}^{d \times d}$$

ineinander übergehen. Dabei fordern wir die volle C^1-Regularität der Randkurve sowie Differenzierbarkeit von A auf ∂G. Auch hier verstehen wir unter einer Hilbert-Plemelj-Lösung eine Außenfunktion, zu der eine entsprechend korrespondierende Innenfunktion existiert. Diese Innenfunktion ist wieder eindeutig durch die Außenfunktion bestimmt. Alle Lösungen desselben Hilbert-Plemelj-Problems fassen wir in der Lösungsmenge

$$\mathrm{HiP}_G(A)$$

zusammen. Diese bildet wiederum einen Vektorraum. Der bedeutende Unterschied zwischen Riemann-Lösungen und Hilbert-Plemelj-Lösungen ist nun der, dass letztere stetig von außen auf den ganzen Rand ∂G fortgesetzt werden können. Riemann-Lösungen dagegen können Unstetigkeiten in den singulären Punkten $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ haben, wo die Übergangssubstitutionen wechseln. Aus diesem Grund können wir die Darstellungssätze für holomorphe Funktionen aus Abschnitt 1.4 auf Hilbert-Plemelj-Lösungen anwenden, auf Riemann-Lösungen dagegen nicht. Die Darstellung der Randwerte einer gegebenen Hilbert-Plemelj-Lösung durch den Hauptwert ihres Cauchy-Integrals bildet dann die Grundlage für die Erkenntnis, dass diese Randwerte einer Fredholm'schen Integralgleichung mit stetigem Matrixkern genügen, auf den wir die Lösungstheorie aus Kapitel 2, d.h. insbesondere den Satz 46 anwenden können. Wir leiten im Unterschied zu Plemelj eine Fredholm-Gleichung für beliebige Hilbert-Plemelj-Lösungen ab, Plemelj tut dies nur für solche, die im unendlich fernen Punkt einen endlichen Wert, d.h. konstanten Hauptteil der Laurent-Reihe um ∞ haben (Hauptsatz 73). Dabei wird der Hauptteiloperator $\mathrm{X}_{\mathbb{C}}^{+}$ aus (33) eine bedeutende Rolle spielen. Die Integralgleichung liefert u.a. die Endlichdimensionalität des Raumes derjenigen Hilbert-Plemelj-Lösungen, die im unendlich fernen Punkt verschwinden. Damit werden wir schließlich auch die Existenz nichttrivialer Hilbert-Plemelj-Lösungen nachweisen. All dies tun wir in Abschnitt 3.4.

Vorher führen wir das Riemann'sche Problem auf das Hilbert-Plemelj-Problem zurück durch Multiplikation mit gewissen matrixwertigen holomorphen Ansatzfunktionen, die bereits eine geeignete Unstetigkeit in den singulären Punkten $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ besitzen. Diese Ansatzfunktionen werden aus Potenzen der Form

$$\left(\frac{z-\zeta_j}{z-\zeta_{j-1}}\right)^{\varrho}$$

zusammengesetzt sein gemäß (102), wobei $\varrho \in \mathbb{C}$, und tauchen bereits in Hilberts Arbeit auf. Dies sind im Allgemeinen mehrdeutige Funktionen, welche in ζ_j und ζ_{j-1} verzweigen. Wir werden zunächst präzise fassen, wie diese Potenzen zu verstehen sind und deren wesentliche Eigenschaften herausarbeiten. Interessant ist der Satz 67 über die Darstellbarkeit von Riemann-Lösungen durch Potenzfunktionen. Im großen Hauptsatz 68 werden wir sehen, wie diese Funktionen einen Zusammenhang zwischen Riemann'schem und Hilbert-Plemelj-Problem liefern, zumindest dann, wenn die Übergangsmatrizen $U^{(1)}, \ldots, U^{(m)}$ allesamt diagonalisierbar sind. Dabei taucht die Menge

$$\mathrm{Rie}_G^r(\zeta, U)$$

von Riemann-Lösungen auf, welche in den singulären Punkten in einer beschränkten Größenordnung $|z-\zeta_j|^r$ wachsen (Definition 66). Damit bilden obige Potenzfunktionen letztlich auch das Bindeglied zwischen den Marx-Shiffman'schen Minimalvektoren und

Fredholm'schen Integralgleichungen. Über diesen Zusammenhang wird es schließlich gelingen, unabhängig von den Marx-Shiffman'schen Minimalvektoren, die Existenz nichttrivialer Riemann-Lösungen nachzuweisen, sowie die Endlichdimensionalität des Raumes derjenigen Riemann-Lösungen, die in den singulären Punkten höchstens mit der Ordnung $|z - \zeta_j|^{-1}$ wachsen und im unendlich fernen Punkt verschwinden.

Aufgrund ihrer Struktur können wir aus den Lösungsräumen sowohl des Hilbert-Plemelj- als auch des Riemann'schen Problems ein gewisses Lösungssystem auswählen, mittels dessen sich alle Lösungen, die im unendlich fernen Punkt nicht wesentlich singulär werden, in einfacher Weise durch polynomielle Linearkombination darstellen lassen. Ein solches ausgezeichnetes System nennen wir ein Plemelj'sches Fundamentalsystem, da Plemelj solche Systeme konkret für die jeweiligen Lösungsräume konstruiert hat. Wir gehen hier abstrakter vor. Im Abschnitt 3.5 fassen wir überhaupt erst präzise den Begriff eines solchen Fundamentalsystems in allgemeiner, von allem Nebensächlichen freier Form (Definition 82) und zeigen auf, unter welchen Strukturbedingungen ein Raum $\mathcal{F}$ von holomorphen Außenfunktionen ein solches Fundamentalsystem besitzt und dieses alle Elemente von $\mathcal{F}$, sofern sie in ∞ höchstens polar unendlich werden, durch polynomielle Linearkombination erzeugt. Dies mündet in den Hauptsatz 84, den wir allgemeinen Plemelj'schen Darstellungssatz genannt haben. Sowohl der Begriff des allgemeinen Plemelj'schen Fundamentalsystems gemäß Definition 82 als auch der allgemeine Plemelj'sche Darstellungssatz stammen in dieser Form von Autor. In den Abschnitten 3.6 und 3.7 werden wir sehen, dass der Hilbert-Plemelj'sche und der Riemann'sche Lösungsraum die allgemeinen Bedingungen von Hauptsatz 84 erfüllen und damit Plemelj'sche Fundamentalsysteme besitzen, was wir im Schlusskapitel verwenden.

In Kapitel 4 zeigen wir den Zusammenhang zwischen dem Heinz'schen Randwertproblem und dem Riemann'schen Problem auf (Hauptsatz 91). Hauptsatz 91 i) wurde bereits von Erhard Heinz entdeckt (bis auf die Gleichungen (157)) und besagt, dass die Ableitung der über den Einheitskreis gespiegelten Heinz- bzw. Marx-Shiffman-Lösung (deren Existenz in [H] gesichert wurde) ein gewisses Riemann'sches Problem löst. Neu sind die Aussagen ii) und iii) von Hauptsatz 91. Aussage ii) gibt die Bedingungen, die eine Riemann-Lösung (unter den vielen) erfüllen muss, damit sie die Ableitung der nach außen gespiegelten Heinz-Lösung ist. Aussage iii) liefert ein Plemelj'sches Fundamentalsystem für das zugehörige Riemann'sche Problem und damit einen Darstellungsansatz für die Ableitung der gespiegelten Heinz-Lösung als polynomielle Linearkombination der Basislösungen des Fundamentalsystems mit im Grad beschränkten Polynomen. Mit ii) können wir dann durch ein lineares Gleichungssystem unter allen so darstellbaren Riemann-Lösungen diejenige herausfinden, welche durch die Heinz-Lösung (bzw. den Marx-Shiffman'schen Minimalvektor) erzeugt wird.

Diese Arbeit ist weitgehend klassisch und elementar in dem Sinn, dass sie mit mäßigem Abstraktionsgrad und ohne Verweise auf tiefliegende Ergebnisse auskommt. Vielmehr wird ihr Tiefgang, der den Ideen großer Mathematiker geschuldet ist, im Laufe der Darstellung entwickelt. Lediglich im Anwendungskapitel 4 verweisen wir im Hinblick auf die Identität von Marx-Shiffman'scher und Heinz'scher Lösungsmenge auf die Arbeit [H]. So hofft der Autor, dem geneigten und ein wenig mit linearer Algebra und Funktionentheorie vertrauten Leser eine nachvollziehbare Arbeit vorgelegt zu haben.

Mein ganz herzlicher Dank gilt meinem akademischen Lehrer Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. Friedrich Sauvigny, der es mir ermöglicht hat, in Freiheit diese Arbeit schreiben zu dürfen. Ich danke ferner den Gutachtern Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. Dr. h. c. mult. Stefan Hildebrandt sowie Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. Frank Müller für Zeit und Aufmerksamkeit, welche sie dem Studium meiner Arbeit gewidmet haben.

Cottbus, im August 2013 Michael Hilschenz

1 Funktionentheoretische Grundlagen

In diesem einführenden Kapitel legen wir grundlegende funktionentheoretische Tatsachen und Bezeichnungsweisen dar, von denen wir im Kapitel 3 Gebrauch machen werden. Von Interesse sind Laurent-Entwicklungen holomorpher Funktionen um den unendlich fernen Punkt, die Darstellung holomorpher Innen- und Außenfunktionen eines (einfach zusammenhängenden, regulären) Gebietes G durch ihre Randwerte sowie das Randverhalten des Cauchy-Integrals.

Dieses Kapitel ist parallel zu den Erfordernissen des Hauptkapitels 3 gewachsen. Es enthält in konzentrierter Form sämtliche funktionentheoretische Zutaten für unsere Behandlung von Riemann- und Hilbert-Plemelj-Problem. Die meisten der dort gemachten Aussagen kann man in irgendeiner Form auch Büchern über Funktionentheorie, wie [BS] oder [K] entnehmen.

1.1 Potenzreihen und assoziierte Konvergenzradien

In diesem Abschnitt leiten wir einen alternativen, für funktionentheoretische Zwecke günstigen Ausdruck für den Konvergenzradius einer Potenzreihe her.

Wenn M_1, M_2 zwei beliebige abstrakte Mengen sind, so sei

$$\mathrm{Abb}(M_1, M_2) := \{f : \ M_1 \longrightarrow M_2\} \tag{2}$$

die Menge aller eindeutigen Abbildungen von der Menge M_1 in die Menge M_2.

Wie üblich bezeichne

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Zur Vektorenfolge $a \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, erklären wir die folgende Teilmenge des Intervalls $[0, +\infty)$:

$$R(a) := \left\{ r \in [0, +\infty) : \begin{array}{l} \text{es gibt eine Zahl } M \in [0, +\infty), \\ \text{so dass } \|a_k\| r^k \leq M \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 \end{array} \right\}. \tag{3}$$

$\|\cdot\|$ bedeute hier eine beliebige Norm im $\mathbb{C}^d$.

Offenbar gelten für jede Folge $a \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}^d)$ die Relation

$$0 \in R(a)$$

sowie die Implikation

$$r \in R(a) \quad \Longrightarrow \quad s \in R(a) \text{ für jedes } s \in [0, r]. \tag{4}$$

Demnach ist $R(a)$ nichtleer und es existiert die Zahl

$$\varrho(a) := \sup R(a) \in [0, +\infty]. \tag{5}$$

Offenbar gelten

$$r \in R(a) \quad \Longrightarrow \quad r \in [0_n, \varrho(a)],$$

sowie

$$r \in [0, \varrho(a)) \quad \Longrightarrow \quad r \in R(a). \tag{6}$$

Es gibt nämlich eine Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $s_k \in R(a)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$s_k \to \sup R(a) = \varrho(a) \quad (k \to \infty).$$

Unter der Annahme, (6) wäre falsch, finden wir ein $\tilde{r} \in [0, \varrho(a))$ mit $\tilde{r} \notin R(a)$. Wegen $s_k \to \varrho(a)$ $(k \to \infty)$ gibt es aber einen Index $N \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{r} \le s_N$. Da $s_N \in R(a)$, so müsste nach (4) doch $\tilde{r} \in R(a)$ gelten.

Hilfssatz 1. *Sei* $a \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}^d)$ *eine Vektorenfolge. Zu beliebigen Zahlen* $r, M \in [0, +\infty)$ *erklären wir die Indexmenge*

$$I = I_{r,M} := \Big\{ k \in \mathbb{N}_0 : \ \|a_k\| r^k > M \Big\}.$$

Falls nun $\varrho(a) < +\infty$ *ausfällt und* $r > \varrho(a)$ *und* $M \ge 0$ *ist, so enthält* $I_{r,M}$ *unendlich viele Elemente.*

Beweis: Wenn $r > \varrho(a)$, so gilt $r \notin R(a)$, und gemäß (3) ist

$$I_{r,M} \neq \varnothing \quad \text{für alle } M \in [0, +\infty). \tag{7}$$

Fänden wir eine Zahl $\tilde{M} \in [0, +\infty)$, so dass $I_{r,\tilde{M}}$ nur endlich viele Elemente $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$, enthält, also

$$K := I_{r,\tilde{M}} = \{k_1, \ldots, k_m\},$$

so folgte

$$\|a_k\| r^k \le \tilde{M} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0 \backslash K.$$

Bilden wir dann die Zahl

$$M := \max_{k \in K} \|a_k\| r^k \in [0, +\infty),$$

so haben wir $M > \tilde{M}$ und

$$\|a_k\| r^k \le M \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0,$$

was gleichbedeutend ist mit $I_{r,M} = \varnothing$, im Widerspruch zu (7). Q.e.d.

Wir werden jetzt sehen, dass $\varrho(a) \in [0, +\infty]$ aus (5) ein anderer Ausdruck für den Konvergenzradius der mit der Folge a assoziierten Potenzreihe darstellt:

Satz 2. *Sei $a \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}^d)$ eine Folge mit $\varrho(a) > 0$. Wir betrachten die mit a assoziierte Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \tag{8}$$

i) Wenn $z \in \mathbb{C}$ ist mit $|z| \in [0, \varrho(a))$, so ist die Reihe (8) absolut konvergent.

ii) Wenn $z \in \mathbb{C}$ ist mit $|z| > \varrho(a)$, so ist die Reihe (8) divergent.

Beweis i): Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \in [0, \varrho(a))$ finden wir eine reelle Zahl r mit $r \in (|z|, \varrho(a))$. Dann gilt zum Einen die Abschätzung

$$\frac{|z|}{r} < 1,$$

zum Anderen liefert (6) die Relation $r \in R(a)$. Damit existiert eine Konstante $M \in [0, +\infty)$ mit

$$\|a_k\| r^k \leq M \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Es folgt

$$\|a_k z^k\| = \|a_k\| |z|^k = \|a_k\| \frac{|z|^k}{r^k} r^k = \|a_k\| r^k \left(\frac{|z|}{r}\right)^k \leq M \left(\frac{|z|}{r}\right)^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0,$$

und damit für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung

$$\sum_{k=0}^{n} \|a_k z\|^k \leq M \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{|z|}{r}\right)^k \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{r}\right)^k = M \frac{1}{1 - \frac{|z|}{r}} =: C \in [0, +\infty).$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k z^k\|$ ist demnach beschränkt, was absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ bedeutet.

ii): Für $z \in \mathbb{C}^n$ mit $|z| > \varrho(a)$ gibt es ein $r \in \mathbb{R}$ mit $r \in (\varrho(a), |z|)$, d.h. es ist

$$\frac{|z|}{r} > 1.$$

Nach Hilfssatz 1 gibt es eine Teilfolge $(k_p)_{p \in \mathbb{N}_0} \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0)$ mit $k_p < k_{p+1}$ für alle $p \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$\|a_{k_p}\| r^{k_p} > 1 \quad \text{für alle } p \in \mathbb{N}_0$$

richtig ist. Dann folgt

$$\|a_{k_p} z^{k_p}\| = \|a_{k_p}\| |z|^{k_p} = \|a_{k_p}\| r^{k_p} \left(\frac{|z|}{r}\right)^{k_p} > \left(\frac{|z|}{r}\right)^{k_p} > 1 \quad \text{für alle } p \in \mathbb{N}_0,$$

und somit kann $(a_k z^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge sein. Folglich ist $\sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} a_k z^k$ nicht konvergent.

Q.e.d.

Definition 3. *Wir nennen den Ausdruck $\varrho(a)$ aus (5) den assoziierten Konvergenzradius der Vektorenfolge $a \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}^d)$ und bezeichnen die Menge aller Vektorenfolgen mit positivem assoziierten Konvergenzradius*

$$\mathcal{R}^d := \Big\{a \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}^d): \ \varrho(a) > 0\Big\}.$$

Für $d = 1$ lassen wir den Index weg und schreiben $\mathcal{R} := \mathcal{R}^1$.

Die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ist für alle z gleichmäßig in jedem Kompaktum $K \subset B_{\varrho(a)}(w)$ und die Zuordnung

$$z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

eine stetige, sogar eine holomorphe Funktion.

Hilfssatz 4. *Sind $a, b \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}^d)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, so gilt*

$$\varrho(\lambda a + \mu b) \geq \min\{\varrho(a), \varrho(b)\}.$$

Dabei sind Addition und Vervielfachung gliedweise zu verstehen.

Beweis: Im uninteressanten Fall $\varrho(a) = 0$ oder $\varrho(b) = 0$ sehen wir obige Relation sofort. Wir gehen also von $\varrho(a) > 0$ und $\varrho(b) > 0$ aus. Dann ist

$$t := \min\{\varrho(a), \varrho(b)\} > 0.$$

Sei nun r beliebig mit $r \in [0, t)$. Dann haben wir die Relationen $r \in [0, \varrho(a))$ und $r \in [0, \varrho(b))$ und Implikation (6) liefert

$$r \in R(a) \quad \text{und} \quad r \in R(b).$$

Demnach gibt es eine Konstante $M \in [0, +\infty)$, so dass

$$\|a_k\| r^k \leq M \quad \text{und} \quad \|b_k\| r^k \leq M \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0$$

richtig ist. Es folgt für alle Indizes $k \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \big\|(\lambda a + \mu b)_k\big\| r^k &= \|\lambda a_k + \mu b_k\| r^k \leq |\lambda| \|a_k\| r^k + |\mu| \|b_k\| r^k \leq |\lambda| M + |\mu| M \\ &= (|\lambda| + |\mu|) M, \end{aligned}$$

d.h. es ist $r \in R(\lambda a + \mu b)$, und zwar für alle $r \in [0, t)$. Somit muss

$$\varrho(\lambda a + \mu b) = \sup R(\lambda a + \mu b) \geq t = \min\{\varrho(a), \varrho(b)\}$$

sein. Q.e.d.

Mit Hilfssatz 4 erhalten wir auch die Vektorraumeigenschaft der Menge $\mathcal{R}^d$.

Wir können den assoziierten Konvergenzradius von a auch mit der bekannten Formel nach Cauchy und Hadamard

$$\varrho(a) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } \sigma(a) = 0 \\ \dfrac{1}{\sigma(a)}, & \text{falls } \sigma(a) \in (0, +\infty) \\ 0, & \text{falls } \sigma(a) = +\infty \end{cases}, \quad \text{wobei } \sigma(a) := \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{\|a_k\|} \in [0, +\infty],$$

ausdrücken. Der Vorteil des Ausdrucks (5) ist, dass man diesen ohne Schwierigkeiten auf Multipotenzreihen übertragen kann.

1.2 Spezifische Aspekte Laurent-Reihen betreffend

In diesem Abschnitt interessieren wir uns für Laurent-Reihenentwicklungen holomorpher Funktionen, auch und insbesondere für Laurent-Entwicklungen um den unendlich fernen Punkt. Besonderes Augenmerk richten wir auf Aussagen über die Konvergenzradien von Haupt- und Nebenteil dieser Reihen, welche im Fortgang der Arbeit eine Rolle spielen werden. Ähnliche Aussagen kann man auch dem §3 in Kapitel III des Buches [BS] entnehmen. Die folgende Darstellung ist von der dortigen unabhängig entstanden.

Definition 5. (Reguläre C^k-Gebiete) *Es sei $k \in \mathbb{N}$. Wir nennen ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit dem topologischen Rand ∂G ein reguläres C^k-Gebiet und schreiben*

$$G \in \mathcal{C}^k,$$

falls folgendes richtig ist:

i) Es gibt einen Homöomorphismus, d.h. eine bijektive und beiderseits stetige Abbildung

$$c: \ [0,1) \longrightarrow \partial G.$$

ii) c besitzt eine 1-periodische Fortsetzung $\hat{c} \in C^k(\mathbb{R}, \partial G)$ mit

$$\hat{c}(t) = c(t) \quad \text{für alle } t \in [0,1),$$

sowie

$$\hat{c}(t+1) = \hat{c}(t) \text{ und } \hat{c}'(t) \neq 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

iii) Zu jedem $t \in \mathbb{R}$ gibt es eine Zahl $\eta = \eta(t) \in (0, +\infty)$ mit

$$\hat{c}(t) + \lambda \cdot i \frac{\hat{c}'(t)}{|\hat{c}'(t)|} \in G \quad \text{und} \quad \hat{c}(t) - \lambda \cdot i \frac{\hat{c}'(t)}{|\hat{c}'(t)|} \in \mathbb{C} \backslash \overline{G} \quad \text{für alle } \lambda \in (0, \eta).$$

In Zukunft wollen wir den Rand eines regulären C^k-Gebietes G mit seiner Randkurve identifizieren. Wir verwenden das Symbol ∂G also je nach Zusammenhang als Bezeichner sowohl für die Menge der Randpunkte von G als auch für eine orientierte Kurve c mit i), ii), iii).

Im Sinne von Definition 5 verstandene reguläre C^1-Gebiete sind offenbar einfach zusammenhängend.

Für Funktionen $f = f(z)$ in der komplexen Variablen $z = x + iy = (x, y)$ erklären wir die Wirtinger'schen Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{9}$$

In jeder offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sind dies offenbar lineare Operatoren

$$\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \in \operatorname{Hom}\big[C^1(\Omega), C^0(\Omega)\big].$$

Es gilt nun die folgende komplexe Version des allgemeinen Gauß'schen Integralsatzes, die wir dem Buch [S1] entnehmen: