

1 Einleitung

1.1 Ausgangslage und Motivation

„The objective in motor racing is to win races [...]. At the very heart of this activity is the problem of achieving a performance from the driver-vehicle entity which, in the particular race environment, exceeds the competition. This is the challenge.“¹

Für die technische Entwicklung im automobilen Rennsport gilt die Minimierung der mittleren Rundenzeit über die gesamte Renndistanz als entscheidendes Entwicklungskriterium. Als Maßstab der Erfüllung dieses Kriteriums wird die minimal mögliche Rundenzeit verwendet, die ohne den Einfluss anderer Fahrzeuge, bei trockener, sauberer Fahrbahn, minimaler Betankungsmenge und neuen Reifen gemessen wird. Andere Faktoren, die Einfluss auf die mittlere Rundenzeit haben, wie die aktuelle Fahrerkonstitution, das Verhalten der anderen Rennteilnehmer oder die Wetterlage, werden durch Entscheidungen im Entwicklungsprozess nicht oder nur wenig beeinflusst und spielen daher eine untergeordnete Rolle. Bei der Entwicklung der verschiedenen Bauteile werden Kriterien wie Betriebsfestigkeit, Sicherheit bei Unfällen oder Bedienbarkeit durch den Fahrer beachtet, doch der Erfolg des Gesamtfahrzeugkonzepts wird letztlich an der minimal möglichen Rundenzeit im Vergleich zu den Konkurrenzfahrzeugen gemessen.

Um die Wechselwirkung und die Interaktionen zwischen den Baugruppen zu untersuchen, ist eine gesamtheitliche Bewertung der verschiedenen Einflüsse auf die Rundenzeit nötig. Aus dieser Gesamtbetrachtung werden die Anforderungen zur Rundenzeitminimierung für die jeweiligen Entwicklungsabteilungen auf die verschiedenen Teilaspekte zerlegt². Aufgrund der kurzen Entwicklungszeiträume erfolgt die Entwicklung unter hohem Zeitdruck³. In Kombination mit Testeinschränkungen lässt sich der optimale Kompromiss immer schwerer im reinen Streckentestbetrieb ermitteln. Daher wird der Streckentest zunehmend mit virtuellen Testmethoden wie Rundenzeitsimulation oder Fahr simulatoren ergänzt, um so eine Vorauswahl der rundenzeitminimalen Zielgrößen zu erzeugen, bevor das Fahrzeug fertig gestellt ist und auf der Strecke eingesetzt wird.

Rundenzeitsimulation berechnet mit einem virtuellen Fahrzeugmodell die minimal erreichbare Rundenzeit für einen bestimmten Fahrzeugparametersatz. Ein Fahrzeugparametersatz ist die abstrahierte Beschreibung eines Fahrzeugs über eine Kombination verschiedener Größen, die für die Modellierung des Fahrzeugs in der virtuellen Testumgebung nötig

¹Milliken und Milliken, *Race Car Vehicle Dynamics* (1995), S. III.

²Verschiedene Anforderungen an die Baugruppen sowie Aufbau der verschiedenen Rennwagenklassen werden bei Trzesniowski, *Rennwagentechnik* (2008) beschrieben.

³In der Formel 1 werden Bauteile wöchentlich für den Einsatz weiterentwickelt, vgl. Tremayne, *The Science of Formula 1 Design* (2006), S. 7-13.

sind. Die Menge aller Fahrzeugparameter umfasst die Gesamtheit der, im Rahmen des Reglements oder anderer sinnvoller Grenzen, möglichen Freiheitsgrade, aus denen über Rundenzeitsimulation die optimale Kombination ausgewählt wird.

Abbildung 1.1 zeigt die Interaktion von Rundenzeitsimulation mit den Entwicklungswerkzeugen Fahr Simulator und Streckentest im Entwicklungsprozess. Über Rundenzeitsimulation wird die Parameter vorauswahl für den Streckenbetrieb erzeugt. Die Optimalität der Vorauswahl wird im Streckentest überprüft und das Ergebnis des Streckentests dient wiederum zur Validierung der Rundenzeitsimulation. Gleichzeitig werden die Ergebnisse mit den Resultaten des Fahr Simulators abgeglichen, dessen Vorhersage ebenfalls mit dem Streckentest validiert wird. Durch die Validierung der beiden Werkzeuge im Streckenbetrieb wird die Aussagegenauigkeit erhöht. Der Austausch der Validierungsergebnisse zwischen

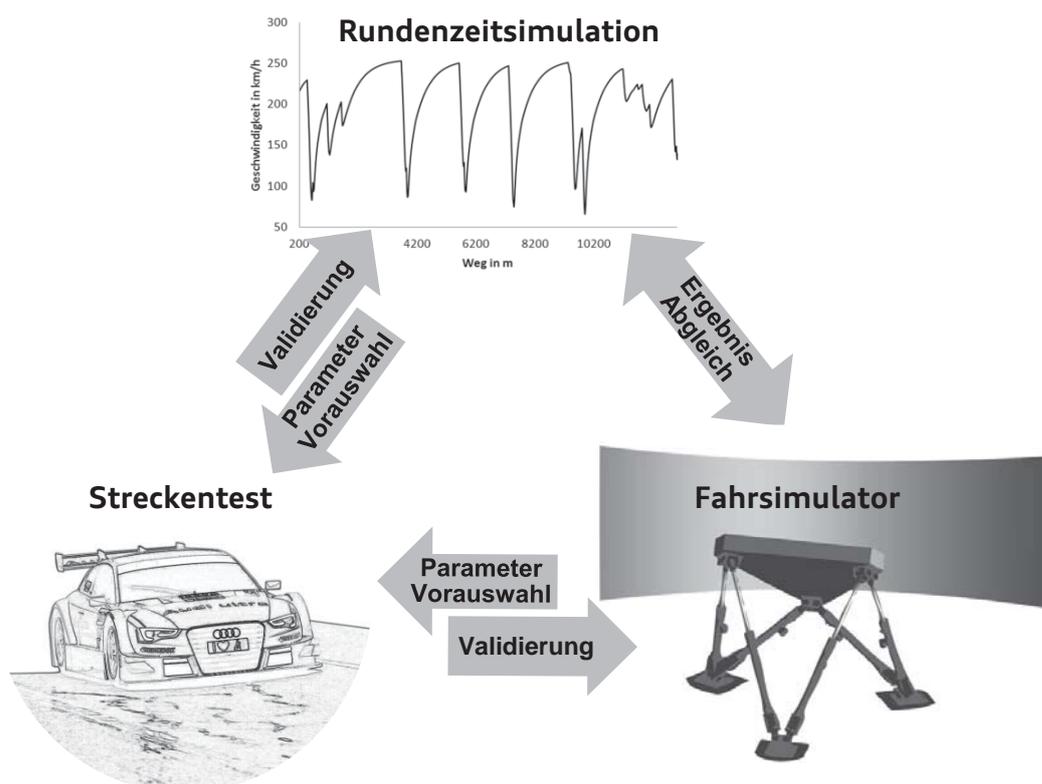


Abbildung 1.1: Rundenzeitsimulation im Entwicklungsprozess.

Ziel der Rundenzeitsimulation ist es, den Entwicklungsprozess zu beschleunigen. Durch genauere Abbildung des Fahrzeugverhaltens in der Rundenzeitsimulation wird eine bessere Parametervorhersage erreicht, wodurch sich ein Wettbewerbsvorteil im Kontext der immer

weiter verkürzten Entwicklungszeiträume ergibt. Die maximale, vom Fahrzeug umsetzbare Beschleunigung bestimmt die mittlere Geschwindigkeit des Fahrzeugs und damit die Rundenzeit. Das Fahrzeugbeschleunigungspotential hängt vom Reibungskoeffizienten des Reifens ab, der wiederum vom transienten Fahrzeugverhalten beeinflusst wird⁴. Als transientes Fahrzeugverhalten wird speziell das Fahrzeugverhalten bezeichnet, das durch eine zeitlich abhängige Systemdynamik verursacht wird. Im Gegensatz dazu steht das statische Fahrzeugverhalten, das durch eine stationär eingeschwungene Systembeschreibung abgebildet wird. Aufgrund des Einflusses der Systemdynamik auf das Reifenkraftpotential ist für eine hohe Qualität der Abbildung des Fahrzeugpotentials in der Rundenzeitsimulation die Erfassung des transienten Fahrzeugverhaltens entscheidend.

1.2 Zielsetzung

Durch Rundenzeitsimulation wird der Entwicklungsprozess beschleunigt, um so einen Vorteil gegenüber dem Wettbewerb zu generieren. Zur Berechnung der wesentlichen, das Fahrzeugbeschleunigungspotential beeinflussenden Größen ist es nötig, dass die Rundenzeitsimulation in der Lage ist, transientes Fahrzeugverhalten abzubilden.

Ziel dieser Arbeit ist es daher, eine Berechnungsmethode zur genauen objektiven Bewertung des Einflusses der transienten Fahrzeugeigenschaften auf die Rundenzeit eines Rennsportfahrzeugs zu entwickeln, um daraus eine Vorgabe für rundenzeitoptimale Fahrzeugparameter abzuleiten.

Um die Übertragbarkeit der Berechnungsmethode auf allgemeine Probleme zur Rundenzeitberechnung zu gewährleisten, wird die Methode anhand verschiedener objektiver Zielbewertungskriterien entwickelt. Dafür werden die in der DIN 55350-13⁵ zur Bewertung eines Ermittlungsergebnisses beschriebenen Kriterien der Präzision und der Genauigkeit verwendet. Neben Präzision wird über Robustheit und Konvergenzverhalten die Toleranz der Methode beschrieben. Die Toleranz beschreibt den geringsten Rundenzeiteinfluss einer Parametervariation bis zu dem eine Rundenzeitaussage möglich ist.

Präzision wird in dieser Arbeit sinngemäß der DIN 55350-13 auf die Wiederholgenauigkeit der Rundenzeitaussage der Methode bezogen. Die Grenze der Präzision ist erreicht, wenn der Rundenzeiteinfluss eines Parameters aufgrund der Ergebnisvariation bei zu kleinen Parameterveränderungen nicht mehr nachvollziehbar ist. Die Präzision wird daher durch eine Variation von Parametern mit geringem Rundenzeiteinfluss über den Abgleich mit der erwarteten Rundenzeitsensitivität überprüft.

Robustheit wird in dieser Arbeit als Kriterium zur Bezeichnung der Zuverlässigkeit des Algorithmus⁶ verwendet. Eine hohe Robustheit meint einen geringen Einfluss auf die berechnete Rundenzeit bei ungünstiger Wahl der Randbedingungen oder der Parameter. Als

⁴Die verschiedenen fahrdynamischen Zusammenhänge werden detailliert von Mitschke, *Dynamik der Kraftfahrzeuge* (2004) und Milliken und Milliken, *Race Car Vehicle Dynamics* (1995) beschrieben.

⁵DIN 55350-13:1987-07, *Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik - Begriffe zur Genauigkeit von Ermittlungsverfahren und Ermittlungsergebnissen* (1987).

⁶Vgl. ISO/IEC 25010:2011, *Systems and software engineering - Systems and software Quality Requirements and Evaluation (SQuaRE) - System and software quality models* (2011).

Randbedingungen werden alle zur Lösung nötigen Vorgaben bezeichnet, die nicht direkt zur Modellbeschreibung nötig sind wie zum Beispiel die Startlösung, von der aus das Ergebnis berechnet wird. Die Robustheit wird über Variation der Randbedingungen überprüft. Bei Parametervariation besteht die Gefahr einer verfälschten Aussage durch unpräzises Verhalten der Berechnung.

Das **Konvergenzverhalten** bezeichnet die Annäherung der Zwischenschritte der Berechnung zu einem Endwert. Das Kriterium ist aus dem in der Mathematik verwendeten Begriff der Konvergenz abgeleitet, der zur Beschreibung von Folgen verwendet wird, die sich einem bestimmten Grenzwert annähern. Eine Berechnung wird als konvergiert betrachtet, wenn die Rundenzeitvariation der einzelnen Zwischenschritte innerhalb eines bestimmten Grenzwertes liegt. Bei einer nicht konvergierenden Berechnung erfolgt keine ausreichende Annäherung. Als robustes Konvergenzverhalten wird ein gegenüber Parameter- und Randbedingungsvariation stabiles Konvergenzverhalten bezeichnet. Das Konvergenzverhalten wird daher über Variation der Parameter und Randbedingungen überprüft.

Die Genauigkeit bezeichnet laut der DIN 55350-13⁷ die Abweichung zu einem Bezugswert, wobei der Bezugswert in diese Arbeit der über den Fahrversuch im Streckentest gebildete Erwartungswert ist. Die Genauigkeit der Methode wird über die drei verschiedene Teilkriterien Modell-, Vorhersage- und Aussagegenauigkeit bewertet.

Als **Modellgenauigkeit** wird Übereinstimmung des Modellverhaltens mit realem Verhalten bezeichnet. Die Modellgenauigkeit wird über die Abweichung der einzelnen Systemzustände zwischen Modell und Realität bewertet.

Die **Vorhersagegenauigkeit** meint die Extrapolationsfähigkeit der Methode. Bei hoher Vorhersagegenauigkeit ist die Methode in der Lage, die Rundenzeiten bei veränderten Parametern vorherzusagen. Die Differenz zwischen tatsächlich gefahrener und berechneter minimaler Rundenzeit wird zur Bewertung der Vorhersagegenauigkeit verwendet.

Die **Aussagegenauigkeit** der Methode bezeichnet die Übereinstimmung der Berechnung mit dem realen Streckentest in Bezug auf die Rundenzeiteinflüsse der Parameter und damit der Optimalität eines Parametersatzes. Zur Bewertung der Aussagegenauigkeit wird der reale, im Streckentest optimierte Fahrzeugparametersatz mit dem rechnerisch optimalen Parametersatz verglichen.

Wie schon die Vorhersagegenauigkeit bewertet die Aussagegenauigkeit dieselbe Eigenschaft der Berechnungsmethode, die Beziehung zwischen Rundenzeit und Fahrzeugparametern korrekt darzustellen. Der Unterschied zur Vorhersagegenauigkeit ergibt sich aus der Art der Überprüfung des Kriteriums. Während die Vorhersagegenauigkeit die Möglichkeit der Berechnung bewertet, vom Parametersatz auf die Rundenzeit zu schließen, erlaubt eine hohe Aussagegenauigkeit einen Rückschluss von der Rundenzeit auf den optimalen Fahrzeugparametersatz.

Um das Ziel der Arbeit zu erreichen, ist sowohl eine hohe Vorhersagegenauigkeit als auch eine hohe Aussagegenauigkeit nötig. Eine hohe Präzision, Robustheit und Modellgenauigkeit sowie eine robustes Konvergenzverhalten sind notwendige Bedingung für eine realistische

⁷DIN 55350-13:1987-07, *Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik - Begriffe zur Genauigkeit von Ermittlungsverfahren und Ermittlungsergebnissen* (1987).

Beschreibung des realen Fahrzeugverhaltens durch die Rundenzeitsimulation und damit notwendig für eine hohe Vorhersage- und Aussagegenauigkeit.

Um einen deutlichen Mehrwert durch die Anwendung der Berechnungsmethode zu erreichen, wird eine Vorhersage- und Aussagegenauigkeit benötigt, die geringer ist als die Genauigkeit im Streckentest. So ist es möglich, die Methode mit Vergleichen über Streckentests zu validieren und während des gesamten Entwicklungsprozesses, nicht nur in der Vorentwicklungsphase, sinnvoll einzusetzen. Das bedeutet, die Grenzwerte für die oben aufgeführten Kriterien werden über einen Vergleich mit Streckentests gebildet.

Die Genauigkeit von Rundenzeituntersuchungen im Streckentest wird durch die Toleranz des Streckentests eingeschränkt. Die Toleranz im Streckentest bezeichnet die Unsicherheit bezüglich der Rundenzeitaussage einer gefahrenen Runde. Als Toleranz wird der Wert der Standardabweichung zum Mittelwert der schnellsten 10 % der gesamten unter vergleichbaren Bedingungen gefahrenen Runden eines Streckentests bezeichnet. Die schnellsten 10 % werden als Referenz ausgewählt, da angenommen wird, dass in einer gezielten Parameterstudie die niedrigen Rundenzeiten umgesetzt werden. Bei einer Parameterstudie mit einem Rundenzeiteinfluss größer als der Wert der Standardabweichung, wird innerhalb weniger Runden über Mittelwertbildung ein Effekt sichtbar, da statistisch gesehen 68,5 % der gefahrenen Runden weniger als den Wert der Standardabweichung vom Mittelwert abweichen. Damit ist die Standardabweichung ein geeigneter Maßstab für die Toleranz im Streckentest.

Ein hoher Abstraktionsgrad in Modell- und Streckenbeschreibung ist nötig, um den numerischen Aufwand und den Aufwand zur Parameteridentifikation zu minimieren und resultiert in einer reduzierten Genauigkeit des Modells. Die Identifikation dieser Ungenauigkeiten wird durch eine zusätzliche Unschärfe bei wenig präzisiertem oder robustem Verhalten der Berechnungsmethode erschwert, da es möglich ist, dass sich Effekte gegenseitig kompensieren. Daher wird die Anforderung formuliert, dass die Unschärfe durch mangelnde Präzision oder Robustheit deutlich geringer ist als die Toleranz bei Streckentests.

1.3 Aufbau der Arbeit und Methodik

Aufbauend auf den Zielen der Arbeit wird top-down aus der Analyse der Problemstellung schrittweise – wie in Abbildung 1.2 dargestellt – eine Methode zur Berechnung der minimalen Rundenzeit definiert, entwickelt und zur Bewertung der transienten Rundenzeiteinflüsse verwendet. An dieser Vorgehensweise orientieren sich auch Gliederung und Aufbau der Arbeit. Fremde Untersuchungen und Hilfsmittel sind in der Abbildung schwarz hinterlegt.

Aus dem Stand der Technik und Forschung wird in Kapitel 2 unter Berücksichtigung der Anforderung aus Kapitel 1.2 die Zielsetzung konkretisiert. Dazu werden die aktuell zur Rundenzeitsimulation verwendeten Methoden beschrieben, um ihre Vor- und Nachteile zu analysieren. Über einen Abgleich mit Zielsetzung und Anforderung an die Methode werden die verschiedenen Möglichkeiten zur Rundenzeitberechnung diskutiert und die Entwicklungsvorgabe über die Rahmenbedingungen und Verfeinerung der Zielsetzung konkretisiert.

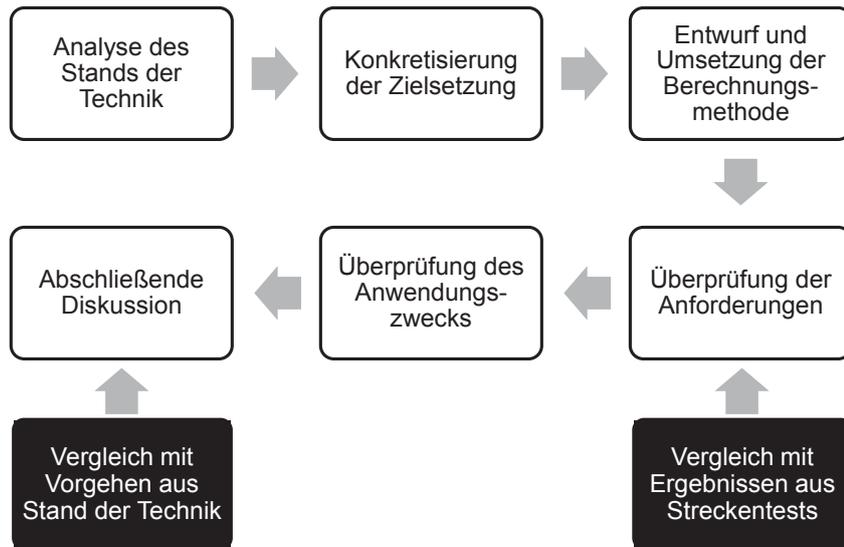


Abbildung 1.2: Methodik des Vorgehens zur Entwicklung der Berechnungsmethode. Hilfsmittel sind mit dunklem Hintergrund dargestellt.

In Kapitel 3 wird aus den Erkenntnissen des Stands der Technik die verwendete Berechnungsmethode entwickelt. Dazu wird diese erst allgemein formuliert und die Grenzen der Anwendbarkeit werden beschrieben, um die Methode anschließend auf die Berechnung der minimalen Rundenzeit anzuwenden. In Kapitel 4 werden der genaue Modellumfang der transienten Fahrzeugbeschreibung und die Umsetzung der Berechnungsmethode beschrieben.

Anschließend wird in Kapitel 5 überprüft, ob die Berechnungsmethode den Anforderungen aus den Bewertungskriterien entspricht, indem die Toleranz bewertet wird, die aus Präzision, Robustheit und Konvergenzverhalten resultiert. Anschließend erfolgt ein Abgleich mit Streckentestdaten, um die Genauigkeit des Fahrzeugmodells zu überprüfen. Außerdem werden die Vorhersage- und Aussagegenauigkeit der Berechnungsmethode beschrieben. Als Referenz dazu dienen im Streckentest aufgenommene Versuchsdaten.

Mit der validierten Berechnungsmethode wird das Anwendungsziel – die Interaktion aus transientem Fahrzeugverhalten und minimaler Rundenzeit – untersucht und in Kapitel 6 beschrieben. Dazu werden verschiedene Rundstrecken und Umgebungsbedingungen untersucht sowie einzelne Modellierungsebenen gezielt abgeschaltet. Weiterhin werden der rundenzeitoptimale Bereich der Fahrzeugparametrierung identifiziert und der Einfluss von verschiedenen Strecken auf die Fahrzeugparametrierung dargestellt.

In der Diskussion in Kapitel 7 werden die vorgestellten Ergebnisse hinsichtlich der gewünschten Untersuchungsziele bewertet und unter den vollzogenen Annahmen kritisch betrachtet. Die Übertragbarkeit der Ergebnisse sowie deren Einschränkungen werden diskutiert. Weiterhin wird der Mehrwert im Vergleich zu den im Stand der Technik vorgestellten Methoden bewertet. Aus dieser Betrachtung ergeben sich die weiteren Entwicklungsschritte, die als Ausblick formuliert werden.

1.4 Begriffe und Definitionen

Neben den im vorherigen Kapitel definierten Begriffen **Präzision**, **Robustheit**, **Konvergenz**, **Toleranz**, **Modellgenauigkeit**, **Vorhersagegenauigkeit** und **Aussagegenauigkeit** werden folgende alphabetisch aufgeführte Begriffe in der Arbeit verwendet:

Basisparameter bezeichnet die Fahrzeugparameter, die wesentlichen Einfluss auf die minimale Rundenzeit eines Fahrzeugs haben. Es handelt sich um Motorleistung, Fahrzeugmasse, Reifenreibungskoeffizient, aerodynamischen Abtrieb und Luftwiderstand⁸.

Beschleunigungsphase bezeichnet den Bereich der Geschwindigkeitstrajektorie einer Rennrunde zwischen Scheitelpunkt und Bremspunkt. Ein Rennfahrzeug befindet sich während einer Rennrunde entweder in der Beschleunigungsphase oder in der Bremsphase.

Bremsphase bzw. **Bremsung** bezeichnet den Bereich der Geschwindigkeitstrajektorie einer Rennrunde zwischen Bremspunkt und Scheitelpunkt.

Bremspunkt bezeichnet ein lokales Maximum der Geschwindigkeitstrajektorie, da in einer Rennrunde die Geschwindigkeit nur reduziert wird, um eine Kurve zu durchfahren.

Fahrzeugparametersatz bezeichnet alle Größen des Fahrzeugs, die für die Modellierung des Fahrzeugs in der virtuellen Testumgebung nötig sind. Als **Fahrzeugparameter** \mathcal{P} wird dementsprechend allgemein eine Größe der Modellbeschreibung des Fahrzeugs bezeichnet. Als (rundenzeit-)optimaler Fahrzeugparameter wird ein Parameter dann bezeichnet, wenn dessen aktueller Wert zur Minimierung der Rundenzeit führt.

Maximales Fahrzeugpotential bzw. **maximales Fahrzeugbeschleunigungspotential** bezeichnet die theoretische, maximal umsetzbare Beschleunigung eines Fahrzeugs, die über die Kraftschlussgrenzen der Reifen, die Motorleistung sowie die maximale Bremskraft begrenzt ist.

Minimale Rundenzeit bezeichnet die geringste von einem Fahrzeug erreichbare ideale Rundenzeit. Sie wird ohne den Einfluss anderer Fahrzeuge, bei trockener, sauberer Fahrbahn, minimaler Betankungsmenge und neuen Reifen gemessen.

Rennrunde bezeichnet eine auf der Rundstrecke gefahrene Runde mit dem Ziel, die minimale Rundenzeit umzusetzen. Sie wird durch das Überqueren der Start-Ziel-Gerade eingeleitet und beendet.

Rundenzeitsensitivität bezeichnet den Einfluss eines Fahrzeugparameters auf die Rundenzeit. Sie wird entweder direkt mit der Rundenzeitveränderung oder mit dem Sensitivitätsindex beschrieben. Der Sensitivitätsindex wird in Kapitel 6 definiert. Die Kenntnis der minimalen Rundenzeit ist Voraussetzung zur Bestimmung der Rundenzeitsensitivität.

Scheitelpunkt bezeichnet ein lokales Minima der Geschwindigkeitstrajektorie. Der Scheitelpunkt befindet sich in der Nähe des Krümmungsmaximums einer Kurvendurchfahrt.

⁸Vgl. Kapitel 2.5.



Start-Ziel-Linie bezeichnet den örtlichen Startpunkt und damit gleichzeitig den Endpunkt einer Rennrunde auf der Rundstrecke.

Statisches Fahrzeugverhalten bezeichnet das Fahrzeugverhalten, das aus einer ausschließlichen Betrachtung der stationär eingeschwungenen Zustände des Fahrzeugs resultiert. Das statische Fahrzeugverhalten wird zur Berechnung der minimalen Rundenzeit in der quasistatischen Rundenzeitsimulation verwendet⁹.

Streckentest bezeichnet eine eventuell über mehrere Tage andauernde Erprobungsfahrt eines Rennfahrzeugs auf einer Rennstrecke mit dem Ziel, die minimale Rundenzeit umzusetzen bzw. durch Anpassung der Fahrzeugparameter zu reduzieren. So wird z. B. eine Dauerläuferprobung auch als Streckentest bezeichnet, wenn die Runden mit dem Ziel gefahren werden, die minimale Rundenzeit zu erreichen. Der Rundenzeiteinfluss durch nicht minimale Betankungsmenge und eventuell gebrauchte Reifen wird rechnerisch über empirisch ermittelte Rundenzeitsensitivitäten kompensiert.

Transientes Fahrzeugverhalten bezeichnet das durch die transienten Zustände der Systembeschreibung verursachte Fahrzeugverhalten und steht im Gegensatz zum statischen Fahrzeugverhalten.

⁹Vgl. Kapitel 2.2.

2 Stand der Technik und Forschung

Erste Untersuchungen im Bereich der Rundenzeitberechnung gehen bis in die 50er-Jahre des 20. Jahrhunderts zurück¹⁰. Moss und Pomeroy beschreiben die bei Mercedes-Benz zur Bestimmung der erwarteten Kurvengeschwindigkeiten und Motordrehzahlen angewendeten Methoden. Rundenzeitsimulation wird zwischen 1954 und 1956 auch zur Streckenauslegung verwendet, um für die fertige Rundstrecke einen bestimmten Rundenzeitdurchschnitt zu erreichen¹¹. Die Strecke wird dabei in Geraden und Kurven mit konstantem Radius aufgeteilt, das Fahrzeug wird als Punktmasse beschrieben. Die Kurvengeschwindigkeiten werden mithilfe des maximalen Querkraftpotentials nach $v = \sqrt{a_{y,max} \cdot r}$ berechnet. Ausgehend von den Kurven wird der Rest der Runde analytisch berechnet. Da die Radlast ohne aerodynamischen Abtrieb konstant bleibt, bestimmt der Reibungskoeffizient der Reifen das Quer- und Längskraftpotential, wobei der Motor die maximale Längskraft zusätzlich beschränkt. Aufgrund der Einfachheit der Zusammenhänge können diese Rechnungen noch per Hand durchgeführt werden.

Komplexere Fahrzeugmodelle, die zur Beschreibung des realen Fahrzeugverhaltens verwendet werden, sind geschwindigkeitsabhängig, nichtlinear und transient¹². Zur Berechnung der Rundenzeit werden daher numerische, computergestützte Berechnungsmethoden eingesetzt. Die Arbeiten zur numerischen Rundenzeitsimulation konzentrieren sich im Wesentlichen auf die Bereiche der quasistatischen (qs) Rundenzeitsimulation, die Anwendung numerischer Optimierungsmethoden oder der Rundenzeitberechnung mithilfe eines modellierten Fahrerreglers. Die Ansätze werden auch kombiniert, um die Vor- und Nachteile der unterschiedlichen Methoden auszugleichen.

2.1 Optimale Steuerung und numerische Optimierung

Die minimale Rundenzeit eines Fahrzeuges ergibt sich aus dem Verhältnis geringster zurückgelegter Fahrstrecke zu maximaler mittlerer Fahrgeschwindigkeit, wobei sich Fahrlinie und maximal mögliche Fahrgeschwindigkeit gegenseitig beeinflussen. Bei der zeitminimalen Trajektorienplanung für ein Rennfahrzeug auf der Rundstrecke handelt es sich um ein Problem der optimalen Steuerungstechnik: Für ein bestimmtes Fahrzeug und eine festgelegte Strecke werden die Steuergrößen $u(t)$ bestimmt, die ein zeitminimales Durchfahren bei Einhaltung der Streckenbegrenzung ermöglichen.

¹⁰Vgl. Moss und Pomeroy, *Design and Behaviour of the Racing Car* (1963) nach Casanova, „On Minimum Time Vehicle Manoeuvring: The Theoretical Optimal Lap“ (2000), S. 1-2.

¹¹Milliken und Milliken, *Race Car Vehicle Dynamics* (1995), S. 340-341.

¹²Vgl. Beschreibung der Längs-, Quer-, und Vertikaldynamik von Mitschke, *Dynamik der Kraftfahrzeuge* (2004).

Optimale Steuerungsprobleme werden üblicherweise über Methoden der Variationsrechnung behandelt oder beruhen auf der Lösung der partiellen Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung¹³. Ein nichtlineares Randwertproblem, das durch die Variationsrechnung aus Pontrjagins Minimalprinzip hergeleitet wird, kann in besonderen Fällen analytisch über ein optimales Regelgesetz allgemein nur über numerische Methoden gelöst werden¹⁴. Numerische Methoden der optimalen Steuerung werden in direkte und indirekte Methoden unterteilt. Indirekte Verfahren erfordern das Lösen des Randwertproblems für gewöhnliche Differenzialgleichungen. Direkte Verfahren übertragen das Optimalsteuerungsproblem in ein Problem der numerischen Optimierung¹⁵. Bei den direkten Schießverfahren werden nur die Steuergrößen diskretisiert, bei den direkten Kollokationsverfahren werden sowohl Steuerungsvariable als auch Zustände des Systems diskretisiert.

Erste Untersuchungen arbeiten noch mit einfachen Modellen und beschränken sich auf einzelne Manöver. Metz und Williams¹⁶ entwickeln aus der optimalen Steuerung einen Quasioptimierungsansatz für ein Zweispurmodell mit vereinfachter Reifenbeschreibung, um bei festgelegter Fahrlinie für einen ausgewählten Streckenabschnitt der Rennstrecke Paul Ricard ein zeitminimales Geschwindigkeitsprofil zu erstellen. Die Autoren vergleichen das Ergebnis mit realen Fahrzeugdaten, dabei kommen sie u. a. zu dem Ergebnis, dass sich professionelle Rennfahrer nahe an der optimierten Steuerstrategie bewegen. Zur Berechnung bei frei wählbarer Fahrlinie verwenden Fujioka und Kimura¹⁷ ein Einspurmodell mit drei Freiheitsgraden. Sie ermitteln die zeitminimale Trajektorie für die Durchfahrt einer Haarnadelkurve mithilfe des „Sequential Conjugate Gradient Restoration“-Algorithmus¹⁸. Der Lösungsalgorithmus bestimmt sowohl die Zustände des Systems $x(t)$ als auch die Steuerungsvariablen $u(t)$ anhand einer definierten Kostenfunktion, unter Einhaltung bestimmter Randbedingungen. Die Kostenfunktion entspricht in diesem Fall dem Integral der Zeit, die Randbedingungen sind die Streckengrenzen. Fujioka und Kimura vergleichen verschiedene Antriebs- und Lenkkonzepte sowie unterschiedliche Achslastverteilungen. Das Fahrzeugverhalten weist die von den Autoren erwarteten Unterschiede auf, wird aber nicht weiter bewertet. La Joie¹⁹ bearbeitet das Randwertproblem direkt über eine Aufteilung in quasi-dynamische Abschnitte, die mit einem Quasi-Newton-Verfahren gelöst werden. Die Optimierungsmethode wird vom Autor grundsätzlich als geeignet erachtet, wobei die Modellvereinfachungen teilweise als zu weitgehend bewertet werden. Hendriks, Meijlink und Kriens²⁰ lösen das optimale Steuerungsproblem mithilfe eines Gradientenverfahrens²¹. Sie verwenden ein ebenes Zweispurmodell mit drei Freiheitsgraden sowie nichtlinearer Reifenkennlinie, um das zeitminimale Steuerungsverhalten verschiedener Fahrzeugkonfigurationen für einen Spurwechsel zu untersuchen. Sie empfehlen die Vorgehensweise für die Ver-

¹³Vgl. Butz, *Optimaltheoretische Modellierung und Identifizierung von Fahrereigenschaften* (2005), S. 12.

¹⁴Vgl. Kirk, *Optimal Control Theory: An Introduction* (1970), S. 329.

¹⁵Eine Übersicht über numerische Optimierung geben Nocedal und Wright, *Numerical Optimization* (2006).

¹⁶Metz und Williams, „Near Time-optimal Control of Racing Vehicles“ (1989).

¹⁷Fujioka und Kimura, „Numerical Simulation of Minimum-Time Cornering Behavior“ (1992).

¹⁸Wu und Miele, „Sequential Conjugate Gradient Restoration Algorithm for Optimal Control Problems with General Boundary Conditions“ (1978).

¹⁹La Joie, *Race Car Performance Optimization* (1994).

²⁰Hendriks, Meijlink und Kriens, „Application of Optimal Control Theory to Inverse Simulation of Car Handling“ (1996).

²¹Kirk, *Optimal Control Theory: An Introduction* (1970), S. 329-409.