Einleitung

Es gibt viele Arten, sich mit Quantenmechanik zu beschäftigen. Wenn man von der Experimentalphysik absieht und ansonsten mit einer sehr groben Charakterisierung zufrieden ist, lassen sich zwei grundsätzliche Varianten unterschieden. Beispielsweise kann man es auf die Berechnung von Zustandsfunktionen, Eigenwerten und dergleichen sowie auf die Herleitung spezieller und allgemeiner Gesetzmäßigkeiten abgesehen haben und befindet sich dann auf dem Gebiet der theoretischen Physik; man kann andererseits auch überprüfen, inwieweit das alles mathematisch überhaupt existiert und strengsten Anforderungen an die formale Rigorosität standhält, womit man sich auf dem Areal der mathematischen Physik bewegt. Wir werden uns hier zwar tendenziell an die zweitgenannte anlehnen, aber genaugenommen einen dritten Weg beschreiten.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Mathematik der Quantenmechanik, genauergesagt mit derjenigen der Hilbertraum-Formulierung der nichtrelativistischen Quantenmechanik. Dies geschieht aus rein technischer Sicht im Sinn der mathematischen Physik, aber nicht mit den Randbedingungen der physikalischen Brauchbarkeit und Anwendbarkeit, sondern mit denjenigen der Beschäftigung mit Mathematik um ihrer selbst willen. Die zentralen Fragen lauten daher: Welche interessanten Sachverhalte hat die Mathematik der Quantenmechanik zu bieten? Welche Zusammenhänge zwischen ihren einzelnen Bereichen gibt es? Welche Verallgemeinerungen sind bekannt, was geschieht, wenn man physikalisch motivierte Einschränkungen mathematisch überschreitet? Wo kommen in der Physik gelegentlich nur heuristisch oder auch gar nicht begründete Begriffe aus mathematischer Sicht her? Ganz wesentlich ist es dabei, die diskutierten Resultate selbst in das Zentrum des Interesses zu rücken und nicht deren technische Anwendbarkeit für was auch immer. Daher sind durchweg ausführliche Beweise unverzichtbarer Bestandteil der Darstellung; sie sind ebenfalls als Selbstzweck zu betrachten. Natürlich kommen dabei sozusagen als Nebenprodukt hier und dort auch physikalische Einsichten heraus, nicht diese stehen jedoch im Zentrum des Interesses, sondern in erster Linie die rein mathematischen Erkenntnisse, die man dabei kennenlernen kann.

Die erkenntnistheoretische Grundhaltung, die hierbei dem Umgang mit der Mathematik unterlegt wird, ist eine uneingeschränkt platonistische Einstellung. Das bedeutet, daß die Mathematik als etwas außerhalb des menschlichen Geistes gegebenes angesehen wird, dessen Bestandteile – Definitionen, Sätze, Beweise – entdeckt und nicht erfunden werden und schon gar nicht in irgendeiner Form gesellschaftlich konstruiert sind. Die Mathematik ist, wenn überhaupt, genau dann eine Naturwissenschaft, wenn man alles nicht vom Menschen gemachte unter dem Begriff der Natur subsummiert, sie unterscheidet sich jedoch insofern drastisch von den übrigen Naturwissenschaften, auch von den mathematischen, als sich letztere mit Gegenständen der materiellen Welt beschäftigen, die Mathematik dagegen mit Gegenständen einer idealen Welt, die aber gleichwohl als real existent aufzufassen ist. Das führt dazu, daß die Mathematik als einzige Wissenschaft nachweislich richtige und für alle Zeiten gültige Resultate liefert, was sicherlich auch und nicht zuletzt ihre Faszination erklären kann.

Exemplarisch und skizzenhaft seien zwei Aspekte genannt, welche besonders gut in der Lage sind, die hier verfolgte Intention zu illustrieren. Erstens werden wir uns ausgiebig mit den merkwürdigen Sachverhalten befassen, die im Zusammenhang mit unendlichdimensionalen Vektorräumen auftreten. All die schönen einfachen Dinge, die in der elementaren linearen Algebra mit ihren endlichdimensionalen linearen Räumen zu finden sind, verwandeln sich, wenn man sich stattdessen mit unendlichdimensionalen Räumen einläßt, in ebenso unendlich komplizierte aber auch entsprechend interessante neue Eigenschaften, und viele weitere, zuvor nicht gekannte, aber ebenso komplizierte neue Phänomene kommen dazu. So werden etwa Hamel-Basen, Schauder-Basen und Orthonormalbasen, zuvor als Synonyme für ein und dasselbe gehandhabt, jetzt zu völlig unterschiedlichen Objekten, kompakte Mengen verhalten sich nun scheinbar verrückt, es gibt unbeschränkte und damit nirgends stetige lineare Abbildungen, die noch dazu eigentlich den Normalfall darstellen, und Eigenwerte und Eigenvektoren erweisen sich gleich in zweifacher Hinsicht als sehr spezielle Sonderfälle viel allgemeinerer Begriffe. Zweitens und damit zusammenhängend liefert die Beschäftigung mit unendlichdimensinalen Banachräumen im allgemeinen und mit dem Spezialfall unendlichdimensionaler Hilberträume im besonderen eine unerschöpfliche Quelle der Unterhaltung. Besonders interessant daran ist der Vergleich der extrem geordneten Verhältnisse bei letzteren mit der unübersichtlichen Vielfalt an zusätzlicher Struktur bei ersteren oder auch der nur stellenweise erfolgreich zum Ziel führbare und dann stets sehr aufwendige Versuch, bei Hilberträumen vertraute und einfach konstruierbare Begriffe in passende Analoga für Banachräume zu übertragen.

Das ganze wird nicht nur der besseren Übersichtlichkeit wegen, sondern auch inhaltlich angepaßt auf zwei Bände verteilt. Zum Aufbau des ersten Teils: Wir beginnen in Kapitel 1 mit einem kurzen Überblick der teilweise über den Standardstoff einführender Mathematik-Vorlesungen hinausgehenden Voraussetzungen aus den Bereichen der mengentheoretischen Topologie sowie der Maß- und Integrationstheorie, wie sie im weiteren Verlauf wiederholt verwendet werden. In Kapitel 2 beschäftigen wir uns ausführlich mit Banachräumen, wobei wir auch die Randgebiete nicht ganz außer Acht lassen und insbesondere auch diskutieren, wie man durch spezielle Fragestellungen auf den wichtigsten Sonderfall innerhalb dieser Raumklasse, nämlich denjenigen der Hilberträume geführt wird. Diese stehen dann im weiteren Verlauf im Blickpunkt. In Kapitel 3 verschaffen wir uns einen Überblick über die wichtigsten Operatorklassen auf Hilberträumen, und in Kapitel 4 betrachten wir wesentliche Aspekte der Spektraltheorie auf Hilberträumen. Dabei werden physikalische Bezüge nur sporadisch und eher beiläufig sichtbar. Im zweiten Teil folgen dann je ein Kapitel über Distributionen und verallgemeinerte Eigenvektoren, statistische Operatoren, Kommutator- und Unschärferelationen, Schrödinger-Operatoren sowie quantenmechanische Axiomatik. Diese Themen lassen unschwer erkennen, daß dabei physikalische Interpretationen sehr viel deutlicher werden, wenngleich sie auch hier nur Nebenprodukte sind. Natürlich können beide Bücher auch ganz direkt als nicht ganz elementare Einführung in die Funktionalanalysis gelesen werden.

Eine kurze Bemerkung zur Bedeutung mathematischer Strenge in der Quantenmechanik dürfte hier angebracht sein. Was der Quantenmechanik im Vergleich zur klassischen Physik ihren Weltbild-erschütternden Charakter verleiht, hat zunächst einmal nichts mit formal rigoroser Darstellung oder gar unendlichdimensionalen Hilberträumen zu tun. Wesentliche revolutionäre Aspekte wie Welle-Teilchen-Dualismus, das Bellsche Theorem oder dergleichen lassen sich sogar bereits in endlichdimensionalen Zustandsräumen diskutieren, und die Tatsache, daß beispielsweise jederzeit spektakulär genaue Energieeigenwerte realer physikalischer Systeme brechnet werden, ohne daß dabei irgendjemand über unbeschränkte Operatoren und singuläre Spektren nachdenkt, unterstreicht diese These nachdrücklich. Interessiert man sich jedoch für die Details und den präzisen Aufbau der Theorie, wird mathematisch strenges Vorgehen relevant, zumal jeweils auch die dabei zutage tretenden Feinheiten physikalische Interpretationen zulassen. Im Rahmen der Hilbertraum-Quantenmechanik sind daher die Besonderheiten unendlichdimensionaler Räume für ein intuitives Verständnis sicherlich nicht zuallererst von Bedeutung, für ein Durchdringen der Theorie in ihren Einzelheiten dafür jedoch umso mehr.

Kapitel 1

Mathematische Grundlagen

Bevor wir zu den im Mittelpunkt des vorliegenden Buchs stehenden mathematischen Gegenständen kommen, wiederholen wir einige wichtige Begriffe und Sachverhalte aus zwei Disziplinen, die sich als wesentlich für die gesamte Thematik erweisen werden. Gemeint sind Topologie und Maßtheorie; erstere, um qualitative, letztere, um quantitative Aspekte von Mengen zu beschreiben, welche in der Quantenmechanik von Bedeutung sind. Wir beschränken uns dabei auf eine Auflistung benötigter Definitionen und Sätze ohne Beweise; Details findet man beispielsweise in [171] oder [172] sowie [56] oder [136]. Natürlich gibt es noch eine Menge weiterer mathematischer Teilgebiete, die für eine sorgfältige Formulierung der Quantenmechanik gebraucht werden, diese werden wir jedoch, soweit sie hier von Bedeutung sind, jeweils bei Bedarf entwickeln, da sie nicht einfach Hilfsmittel, sondern eher Gegenstand der mathematischen Quantenmechanik sind.

1.1 Elementare Topologie

Die Topologie steht direkt über der Mengenlehre an der zweituntersten Stelle der mathematischen Grundlagendisziplinen[1]. Man kann sie in drei Bereiche unterteilen, die *mengentheoretische Topologie*, welche die Grundlage bildet und mit Techniken aus der elementaren Mengenlehre arbeitet, die *algebraische Topologie*, die Hilfsmittel aus der Algebra wie Ringe, Gruppen oder Moduln verwendet, und die *Differentialtopologie*, die den betrachteten Objekten differenzierbare Strukturen aufprägt und damit für die globalen Aspekte der Differentialgeometrie zuständig ist. Betrachtet man die für die Hilbertraum-Formulierung der Quantenmechanik getreu dieser Bezeichnung zentralen Zustandsräume als Punktmengen, kann man ihnen auch topologische Eigenschaften zuordnen, die wesentlich von der mengentheoretischen Topologie erfaßt werden. Entsprechend wird ausschließlich diese Gegenstand der folgenden Abschnitte sein. Dazu beginnen wir mit einigen Konventionen hinsichtlich der Notation[2] sowie einigen grundlegenden mengentheoretischen Begriffen.

[1] Sofern man von eher metamathematischen Disziplinen wie Logik oder Modelltheorie absieht.
[2] Wir verwenden hier im wesentlichen die Schreibweise von [187].

1.1.1 Notationen und Begriffe aus der Mengenlehre

Die grundlegenden Symbole $\{, \}, \in, \emptyset$ der Mengenlehre brauchen wohl keine nähere Erläuterung, ebensowenig wie $\subset, \supset, \subseteqq, \supseteqq$ sowie $\cap$ und $\cup$. Einige weitere Symbole seien nachstehend kurz erläutert. Zu zwei Mengen A und B sei $A \setminus B = \{ x \in A \mid x \notin B \}$ deren *Differenz* und $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ deren *symmetrische Differenz*. Für *Ordinalzahlen* verwenden wir griechische Buchstaben $\alpha, \mathrm{A}, \beta, \mathrm{B}, \gamma, \Gamma, \ldots$ vom Anfang des Alphabeths; die kleinste transfinite Ordinalzahl sei ω. Für *unendliche Kardinalzahlen* verwenden wir entweder kleine griechische Buchstaben $\kappa, \lambda, \ldots$ aus der Mitte des Alphabets oder die *Aleph-Reihe* $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \ldots, \aleph_\kappa, \ldots$, welche die Klasse der unendlichen Kardinalzahlen vollständig ausschöpft. $\aleph_0$ ist die einzige abzählbare Kardinalzahl; alle $\aleph_\alpha$ mit $\alpha \geqq 1$ sind überabzählbar. Die Alephs sind gleichzeitig die Mächtigkeiten der jeweils kleinsten transfiniten Ordinalzahlen $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\kappa, \ldots$. Ist α eine Ordinalzahl, dann sei $\alpha^{<\kappa} = \bigcup \{ \alpha^\beta \mid \beta < \kappa \}$. Die *Mächtigkeit* einer Menge A sei mit $|A|$ bezeichnet; man kann sich unendliche Kardinalzahlen stets auch als Mengen von jeweils entsprechender Mächtigkeit vorstellen. Somit gilt $\kappa^\lambda = |\kappa|^{|\lambda|}$. Die *Potenzmenge* von A bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}(A)$ und die *Menge aller Funktionen* $f : A \longrightarrow B$ mit ${}^{A}B$. Damit gilt $|{}^{\lambda}\kappa| = \kappa^\lambda$. Jede wohlgeordnete Menge A läßt sich ordnungserhaltend und bijektiv auf eine Ordinalzahl α abbilden; man sagt, α sei der *Ordnungstyp* von A und schreibt $\alpha = \# A$. In diesem Sinn kann man sich auch Ordinalzahlen als Mengen vorstellen. Wir schreiben $[A]^\alpha = \{ B \subseteqq A \mid \# B = \alpha \}$ sowie $[A]^{<\alpha} = \bigcup\limits_{\beta < \alpha} [A]^\beta$ und $[A]^{\leqq \alpha} = \bigcup\limits_{\beta \leqq \alpha} [A]^\beta$. Eine Ordinalzahl α heißt *Nachfolgerordinalzahl*, wenn es eine Ordinalzahl β gibt mit $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$, andernfalls heißt sie *Limesordinalzahl*. Eine Kardinalzahl κ heißt *Nachfolgerzahl*, wenn es eine Ordinalzahl α gibt mit $\kappa = \aleph_{\alpha+1}$; dann gibt es ein λ mit $\kappa = \lambda \cup \{\lambda\}$. Andernfalls heißt κ *Limeszahl*; in diesem Fall gibt es eine Limesordinalzahl γ mit $\kappa = \aleph_\gamma$. Die *Beth-Reihe* ist definiert durch $\beth_0 = \aleph_0$ und $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$ sowie $\beth_\alpha = \bigcup\limits_{\beta < \alpha} \beth_\beta$, falls α eine Limesordinalzahl ist. Eine Kardinalzahl κ heißt *starke Limeszahl*, wenn für jedes $\lambda < \kappa$ auch $2^\lambda < \kappa$ gilt, das heißt $\kappa = \beth_\alpha$ für eine Limesordinalzahl α. Für die *Konfinalität* der Limesordinalzahl α schreiben wir $\mathrm{cf}(\alpha)$. Eine Kardinalzahl κ heißt *regulär*, wenn $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$; sie heißt *singulär*, wenn $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$. Eine überabzählbare Kardinalzahl κ heißt *schwach unerreichbar*, wenn κ eine reguläre Limeszahl ist. κ heißt *stark unerreichbar*, wenn κ eine reguläre starke Limeszahl ist. Unerreichbare Kardinalzahlen sind die einfachsten Beispiele für *große Kardinalzahlen*, also solche, die viel größer sind als alle Kardinalzahlen, die durch konventionelle arithmetische oder mengentheoretische Konstruktionen erreichbar sind[3]. Wesentlich größere Exemplare werden wir im Abschnitt 1.2.1 kennenlernen, wobei wir ausdrücklich anmerken, daß es auch darüberhinaus noch viel größere große Kardinalzahlen gibt.

[3]Große Kardinalzahlen stellen ein wesentliches Teilgebiet der Mengenlehre dar; ihre Existenz muß in Form zusätzlicher Axiome zu den gewöhnlichen Axiomensystemen der Mengenlehre dazugefügt werden. Entsprechend liefern Resultate über große Kardinalzahlen Informationen über mögliche sinnvolle Erweiterungen der Standard-Axiomensysteme und damit über die Grundlagen der Mathematik auf fundamentaler Ebene. Dabei sind inzwischen sehr viele unterschiedliche Klassen großer Kardinalzahlen mit sehr unterschiedlichen Größen entdeckt worden. Ausführliche Informationen hierüber erteilen [72] und [187].

1.1.2 Offene Mengen

Die Topologie beschäftigt sich mit Eigenschaften von Punktmengen, die nur von der gegenseitigen Lage der Punkte abhängen und nicht von irgendwelchen Abständen. Etwas vereinfacht, aber sehr anschaulich kann man sich vorstellen, daß solche Eigenschaften bei beliebigen elastischen Verformungen erhalten bleiben, wobei das natürlich mathematisch präzisiert werden muß. Dabei ist die Feststellung hilfreich, daß bei elastischen Verformungen in der Nähe eines beliebigen Punktes des betrachteten Objekts in gewissem Sinne relativ wenig passiert, während etwa bei Verformungen, die Risse zur Folge haben, das nicht der Fall ist. Entsprechend gelingt die erwähnte Präzisierung mit Hilfe der Begriffe der Umgebungen und der stetigen Abbildungen, wobei letztere im Vergleich zur elementaren Analysis auf wesentlich allgemeinere Art zu definieren sind.

1.1.2.1 Topologische Räume

Wir beginnen mit dem grundlegenden Begriff der Topologie.

1.1 Definition: X sei eine Menge, $\mathfrak{P}(X)$ deren Potenzmenge und $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X, das folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) $\emptyset \in \mathfrak{X},\ X \in \mathfrak{X}$,

(ii) $A, B \in \mathfrak{X} \implies A \cap B \in \mathfrak{X}$,

(iii) $\mathfrak{U} \subseteqq \mathfrak{X} \implies \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{U}} A \in \mathfrak{X}$.

Dann heißt $(X, \mathfrak{X})$ topologischer Raum.

$\mathfrak{X}$ heißt *Topologie* auf der *Trägermenge* X. Die Elemente von X heißen *Punkte*, die Elemente von $\mathfrak{X}$ heißen *offene Mengen*. Die Komplemente der offenen Mengen heißen *abgeschlossene Mengen*.

Die hier angegebene Definition auf der Grundlage offener Mengen ist nicht die einzig mögliche; genausogut kann dies ausgehend von abgeschlossenen Mengen, Umgebungen oder der Bildung abgeschlossener Hüllen von Teilmengen erfolgen.

Ist $(X, \mathfrak{X})$ ein topologischer Raum, dann heißt eine Menge $\mathfrak{B}$ von offenen Mengen *Basis der Topologie*, wenn jede offene Menge Vereinigung von Mengen aus $\mathfrak{B}$ ist. Die kleinste Kardinalzahl κ so daß es eine Basis von $(X, \mathfrak{X})$ der Kardinalität κ gibt, heißt *topologisches Gewicht* oder kurz *Gewicht* von $(X, \mathfrak{X})$; man schreibt dafür $\mathfrak{w}(X)$. Eine Menge $\mathfrak{S}$ von offenen Mengen heißt *Subbasis der Topologie*, wenn jede offene Menge Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathfrak{S}$ ist. Für eine Menge X und eine beliebige Menge $\mathfrak{S}$ von Teilmengen von X gibt es genau eine Topologie $\mathfrak{X}(\mathfrak{S})$, für die $\mathfrak{S}$ Subbasis ist; $\mathfrak{X}(\mathfrak{S})$ nennt man die *von* $\mathfrak{S}$ *erzeugte Topologie*. Ist T eine Teilmenge eines topologischen Raums $(X, \mathfrak{X})$, dann heißt $\mathfrak{X}_T := \{ A \cap T \mid A \in \mathfrak{X} \}$ *Relativtopologie* oder *Spurtopologie* auf T bezüglich $(X, \mathfrak{X})$, und $(T, \mathfrak{X}_T)$ heißt *Teilraum* von $(X, \mathfrak{X})$.

Die Topologien einer Trägermenge X müssen nicht notwendigerweise vergleichbar sein bezüglich der $\subseteqq$-Relation; sind es zwei Topologien $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ von X doch und gilt dabei

$\mathfrak{X}_1 \subsetneqq \mathfrak{X}_2$, dann sagt man: $\mathfrak{X}_1$ ist *gröber* als $\mathfrak{X}_2$ beziehungsweise $\mathfrak{X}_2$ ist *feiner* als $\mathfrak{X}_1$. Auf jeder Trägermenge X ist $\{\emptyset, X\}$ die gröbste und $\mathfrak{P}(X)$ die feinste Topologie. $\{\emptyset, X\}$ heißt *triviale Topologie* und $\mathfrak{P}(X)$ heißt *diskrete Topologie*[4]. Die von einer beliebigen Menge $\mathfrak{S}$ offener Teilmengen von X erzeugte Topologie $\mathfrak{X}(\mathfrak{S})$ ist die gröbste Topologie, die alle Mengen aus $\mathfrak{S}$ enthält.

Ist J eine beliebige Indexmenge und $(X_j, \mathfrak{X}_j)_{j \in J}$ eine Familie topologischer Räume, dann kann man das kartesische Produkt $X = \prod\limits_{j \in J} X_j$ unter anderem folgendermaßen topologisieren. Sei $\mathfrak{B} := \left\{ \prod\limits_{j \in J} A_j \;\middle|\; A_j \in \mathfrak{X}_j \text{ für alle } j \in J,\ A_j \neq X_j \text{ nur für endlich viele } j \in J \right\}$; dann ist $\mathfrak{X} := \{A \subset X \mid A \text{ ist eine Vereinigung von Mengen aus } \mathfrak{B}\}$ eine Topologie auf X. Diese heißt *Produkttopologie*, und $(X, \mathfrak{X})$ heißt dann das *topologische Produkt* der $(X_j, \mathfrak{X}_j)_{j \in J}$. Definiert man die kanonischen Abbildungen $\pi_j : X \longrightarrow X_j$ durch $\pi_j((x_j)_{j \in J}) = x_j$ für $j \in J$, dann ist die Produkttopologie gleichzeitig die gröbste Topologie auf X, für die alle π_j stetig sind. Auf die topologische Bedeutung des Begriffs der Stetigkeit kommen wir gleich zurück.

1.1.2.2 Umgebungen

Im folgenden sei $(X, \mathfrak{X})$ stets ein topologischer Raum. Wir gehen gleich weiter zum nächsten grundlegenden, weit über die Topologie hinaus bedeutsamen Begriff:

1.2 Definition: Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt Umgebung eines Punktes $x \in X$, wenn es eine offene Menge $G \subset X$ gibt mit $x \in G \subset U$.

Damit lassen sich offene Mengen anschaulich charakterisieren: $A \subset X$ ist genau dann offen, wenn A Umgebung jedes seiner Punkte ist. Sei nun $x_0 \in X$. Eine Menge $\mathfrak{U}$ von Umgebungen von x_0 heißt *Umgebungsbasis* von x_0, wenn jede Umgebung von x_0 eine Umgebung aus $\mathfrak{U}$ enthält.

Für eine Teilmenge $A \subset X$ lassen sich nun spezielle Punkte mit besonderen Eigenschaften angeben. $x \in X$ heißt *Berührpunkt* von A, wenn jede Umgebung von x mindestens einen Punkt mit A gemeinsam hat, andernfalls heißt x *äußerer Punkt* von A. Ein Berührpunkt x heißt *innerer Punkt* von A, wenn es eine Umgebung U von x gibt mit $U \subset X$; enthält jede Umgebung von x zugleich Punkte von A und von $X \setminus A$, dann heißt x *Randpunkt* von A. Ein Randpunkt, der eine Umgebung besitzt, die keinen weiteren Punkt von A enthält, heißt *isolierter Punkt* von A. Ein Punkt x heißt *Häufungspunkt* von A, wenn jede Umgebung von x einen Punkt $x' \neq x$ aus A enthält. A' ist die Menge aller Häufungspunkte von A und heißt *Ableitung* von A. Mit ∂A bezeichnet man die Menge aller Randpunkte oder kurz den *Rand* von A. Außerdem heißt $A^\circ := A \setminus \partial A$ *Inneres* oder *offener Kern* von A und $\overline{A} := A \cup \partial A$ *abgeschlossene Hülle* oder *Abschluß* von A. Offensichtlich bestehen offene Mengen nur aus inneren Punkten, während abgeschlossene Mengen alle ihre Randpunkte enthalten. Hieran ist erkennbar, daß es Mengen gibt, die weder offen noch abgeschlossen sind. Außerdem gibt

[4] Der Name kommt daher, daß im Falle der diskreten Topologie alle Teilmengen von X offen sind, insbesondere auch die einpunktigen. Die Punkte kann man sich daher als diskret und nicht kontinuierlich verteilt vorstellen.

es Mengen, die Punkte enthalten, die gleichzeitig innere Punkte und Randpunkte sind, und damit auch Mengen, die offen und abgeschlossen sind.

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *dicht* in X, wenn $\overline{A} = X$. Sie heißt *nirgends dicht*, wenn $\overline{A}^{\circ} = \emptyset$. Gilt $A \supseteqq A'$ und damit $A = \overline{A}$, so ist A abgeschlossen, gilt $A \subseteqq A'$, so heißt A *in sich dicht*, und gilt $A = A'$, so heißt A *perfekte Menge*. Anschaulich gesprochen sind perfekte Mengen abgeschlossene Mengen ohne isolierte Punkte oder abgeschlossene, in sich dichte Mengen. Für alle $A \subset X$ gilt das folgende:

a) $A^{\circ} \in \mathfrak{X}$,

b) $A \in \mathfrak{X} \iff A = A^{\circ}$,

c) $A^{\circ} \subset A \subset \overline{A}$,

d) $\emptyset^{\circ} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ und $X^{\circ} = \overline{X} = X$,

e) $A^{\circ} = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$ und $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A^{\circ})$.

In der diskreten Topologie sind alle Teilmengen der Trägermenge zugleich offen und abgeschlossen.

Ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{X})$ erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Er erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn es eine abzählbare Basis der zugehörigen Topologie $\mathfrak{X}$ gibt. $(X, \mathfrak{X})$ heißt *separabel*, wenn X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Die kleinste Kardinalzahl κ so daß es eine dichte Teilmenge A der Menge X mit $|A| = \kappa$ gibt, nennt man *topologische Dichte* oder kurz *Dichte* von X und schreibt dafür $\mathfrak{d}(X)$. Die beiden Abzählbarkeitsaxiome übertragen sich auch auf Teilräume; für die Separabilität ist das jedoch nicht der Fall. Erfüllt ein Raum das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so erfüllt er auch das erste und ist separabel; das umgekehrte gilt jeweils nicht. Das erste Abzählbarkeitsaxiom wird gleich im Zusammenhang mit Kompaktheit und Stetigkeit wieder auftauchen; das zweite spielt insbesondere im Rahmen der Differentialtopologie eine Rolle, und Separabilität ist bei Hilberträumen der Quantenmechanik von wesentlicher Bedeutung.

Eine weitere Einteilung topologischer Räume in Kategorien stammt von R. Baire [17] und ist außer in der Topologie auch in der Mengenlehre, der Maßtheorie und der linearen Algebra von großer Wichtigkeit. X sei ein topologischer Raum und A eine Teilmenge von X. Dann heißt A von *erster Kategorie* in X, wenn A eine Vereinigung von abzählbar vielen nirgends dichten Mengen ist. A heißt von *zweiter Kategorie* in X, falls A nicht von erster Kategorie in X ist. Eine Teilmenge A, die von zweiter Kategorie in X ist, enthält somit mindestens eine Teilmenge, die nicht nirgends dicht ist. Ein topologischer Raum, in dem jede nichtleere offene Menge von zweiter Kategorie ist, heißt *Baire-Raum*.

Mit den bisher zur Verfügung stehenden Begriffen können wir bereits einiges über die Struktur topologischer Räume aussagen. Dazu benötigen wir folgende

1.3 Definition: $(X, \mathfrak{X})$ sei ein topologischer Raum.

(i) $A, B \subset X$ heißen *separiert*, wenn $\overline{A} \cap B = \emptyset$ und $A \cap \overline{B} = \emptyset$ ist.

(ii) $(\mathsf{X}, \mathfrak{X})$ heißt *zusammenhängend*, wenn X nicht als Vereinigung zweier nichtleerer separierter Teilmengen dargestellt werden kann.

(iii) Eine Teilmenge von $(\mathsf{X}, \mathfrak{X})$ heißt *zusammenhängend*, wenn sie versehen mit der Relativtopologie zusammenhängend ist.

Eine zusammenhängende Menge $\mathsf{A} \subset \mathsf{X}$ heißt auch ein *Gebiet*. Ist $(\mathsf{X}, \mathfrak{X})$ zusammenhängend, dann sind $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen, die offen und abgeschlossen zugleich sind. Die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathsf{T}}$ einer zusammenhängenden Teilmenge T und jede Menge A mit $\mathsf{T} \subseteqq \mathsf{A} \subseteqq \overline{\mathsf{T}}$ sind zusammenhängend.

Bei nichtzusammenhängenden Räumen ist man häufig daran interessiert, jedem Punkt eine möglichst große Teilmenge zuzuordnen, die diesen Punkt enthält. Die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen, die einen Punkt x enthalten, heißt *Zusammenhangskomponente* von x. Zusammenhangskomponenten sind stets abgeschlossen. Jeder topologische Raum läßt sich in disjunkte Zusammenhangskomponenten zerlegen, die paarweise separiert sind. Ein topologischer Raum heißt *lokalzusammenhängend*, wenn jede Umgebung jedes Punktes eine zusammenhängende Umgebung umfaßt. In diesem Fall sind die Zusammenhangskomponenten des topologischen Raumes auch offen. $(\mathsf{X}, \mathfrak{X})$ heißt *Hausdorff-Raum*, wenn je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen besitzen. $(\mathsf{X}, \mathfrak{X})$ heißt *normal*, wenn je zwei beliebige disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X disjunkte offen Umgebungen besitzen. Eine wichtige Eigenschaft normaler topologischer Räume beschreibt das

1.4 Lemma von Urysohn:[5] *Ein topologischer Raum* $(\mathsf{X}, \mathfrak{X})$ *ist genau dann normal, wenn es zu je zwei beliebigen nichtleeren abgeschlossenen disjunkten Teilmengen* A *und* B *von* X *eine stetige Funktion* $f : \mathsf{X} \longrightarrow [0, 1]$ *gibt mit* $f(x) = 0$ *für alle* $x \in \mathsf{A}$ *und* $f(x) = 1$ *für alle* $x \in \mathsf{B}$.

Die Aussage des Urysohnschen Lemmas läßt sich natürlich sofort auf beliebige Intervalle $[a, b]$ übertragen und liefert dann für jeden normalen Raum X stetige Funktionen mit $f(x) = a$ für alle $x \in \mathsf{A}$ und $f(x) = b$ für alle $x \in \mathsf{B}$. Eine weitere und sehr viel bedeutendere Verallgemeinerung ist der

1.5 Fortsetzungssatz von Tietze:[6] *Ein topologischer Raum* $(\mathsf{X}, \mathfrak{X})$ *ist genau dann normal, wenn es zu jeder stetigen Funktion* $f : \mathsf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ *auf einer abgeschlossenen Teilmenge* A *von* X *eine stetige Funktion* $g : \mathsf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *gibt mit* $g \restriction \mathsf{A} = f$. *Falls außerdem* $|f(x)| < s$ *gilt für alle* $x \in \mathsf{A}$, *dann kann man* g *so wählen, daß* $|g(x)| < s$ *gilt für alle* $x \in \mathsf{X}$.

1.1.2.3 Kompaktheit

Aus der elementaren Analysis ist man gewohnt, daß Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen oder, etwas weniger speziell, auf abgeschlossenen und beschränkten Definitionsmengen besonders übersichtliche Eigenschaften aufweisen[7]. Daher liegt der Wunsch nahe, etwas ent-

[5] Benannt nach seinem Entdecker P. S. Urysohn [379].

[6] Dieses Resultat verdankt seinen Namen dem niederösterreichischen Mathematiker Heinrich Tietze [369].

[7] Man denke an solche Sachverhalte wie den Zwischenwertsatz, den Nullstellensatz oder ähnliches.

sprechendes für beliebige topologische Räume zu haben. Eine solche Verallgemeinerung liefert die Eigenschaft der Kompaktheit.

Bevor wir nun zu diesem Begriff selbst kommen, ist wieder eine vorbereitende Definition erforderlich. X sei eine Menge und $\mathfrak{D} \subseteqq \mathfrak{P}(X)$ ein System von Teilmengen. $\mathfrak{D}$ heißt *Überdeckung* von X, wenn $X = \bigcup_{D \in \mathfrak{D}} D$ gilt. $\mathfrak{D}$ heißt *offene Überdeckung*, wenn alle Elemente aus $\mathfrak{D}$ offen sind und *abgeschlossene Überdeckung*, wenn alle Elemente aus $\mathfrak{D}$ abgeschlossen sind. Damit stellen wir nun einen der wichtigsten topologischen Begriffe überhaupt vor.

1.6 Definition: Ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{X})$ heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält[8].

Die Stärke der Eigenschaft einer Menge, kompakt zu sein, liegt darin, daß die in obiger Definition formulierte Forderung für jede offene Überdeckung ausgesprochen wird; entsprechend genügt die bloße Existenz von irgendwelchen speziellen endlichen Überdeckungen nicht. Es gibt eine Reihe von Abschwächungen und Spezialisierungen des Begriffs der Kompaktheit. Wenn jede offene Überdeckung von X eine abzählbare Überdeckung enthält, heißt $(X, \mathfrak{X})$ *Lindelöf-Raum*. $(X, \mathfrak{X})$ heißt *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt. $(X, \mathfrak{X})$ heißt *σ-kompakt*, wenn X eine Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Teilmengen ist. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt kompakt, wenn sie versehen mit der Relativtopologie kompakt ist. In einem kompakten Raum ist eine Teilmenge genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist. Eine Teilmenge A eines topologischen Raums X heißt *relativ kompakt*, wenn der Abschluß $\overline{A}$ kompakt ist.

Ein weiterer wichtiger Kompaktheitsbegriff ist derjenige der Präkompaktheit: Ein topologischer Raum heißt *präkompakt* oder *folgenkompakt*, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge hat. Die beiden Begriffe sind nicht äquivalent; im Gegenteil, weder folgt aus Kompaktheit Folgenkompaktheit, noch gilt das Gegenteil. Wenn ein topologischer Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, dann ist er auch präkompakt[9], und dann sind immerhin alle kompakte Mengen erst recht präkompakt.

Das folgende Resultat über kompakte Teilmengen lokalkompakter Räume ist gelegentlich sehr nützlich.

1.7 Satz: X *sei ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, außerdem seien* $A \subset X$ *kompakt sowie* $B \subset X$ *und* $C \subset X$ *offen mit* $A \subset B \cup C$. *Dann gibt es kompakte Mengen* $D \subset B$ *und* $E \subset C$ *sodaß* $A = D \cup E$.

Aufgrund seiner großen Bedeutung in mehrerlei Hinsicht erwähnen wir ein weiteres Resultat explizit, obwohl dieses im vorliegenden Buch nicht unmittelbar zum Einsatz kommt.

---

[8] Gelegentlich taucht anstelle des hier definierten Kompaktheitsbegriffs das Attribut *quasikompakt* auf; in dieser Terminologie spricht man erst dann von einem kompakten Raum, wenn dieser gleichzeitig auch ein Hausdorffraum ist.

[9] Der Beweis hierfür macht Gebrauch vom *Auswahlaxiom*. Dieses besagt folgendes: *Für jede Menge* $\mathfrak{M}$ *nichtleerer Mengen gibt es eine Funktion* $F : \mathfrak{M} \longrightarrow \bigcup \mathfrak{M}$ *mit* $F(A) \in A$ *für alle* $A \in \mathfrak{M}$. Das Auswahlaxiom wurde von Zermelo entdeckt [397]. Seine Bedeutung für die Mathematik kann hier nur angedeutet werden; wir kommen in einigen Anmerkungen darauf zurück.

1.8 Satz von Tychonoff:[10] *Das Produkt jeder nicht leeren Familie kompakter topologischer Räume ist kompakt.*

Abgesehen von seiner sehr weit gefächerten Anwendbarkeit liegt die Bedeutung des Satzes von Tychonoff vor allem auch in seiner Äquivalenz zum Auswahlaxiom[11]. Das hat er mit einigen anderen fundamentalen Sätzen gemein; zwei davon werden uns im weiteren Verlauf des Buches begegnen.

1.1.2.4 Konvergenz und Stetigkeit

Im Rahmen der mengentheoretischen Topologie lassen sich nun gewisse aus der elementaren Analysis wohlbekannte Begriffe ausschließlich auf Basis der Mengenlehre und ohne Verwendung jeglicher metrischer Hilfsmittel, insbesondere auch ohne Beträge oder Normen, definieren und dadurch auf ihre allgemeinste mögliche Gestalt bringen.

Eine *Folge* in einer Menge A ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{A}$. Häufig verwendet man die Schreibweise $x_n := f(n)$; aufgrund ihrer Abzählbarkeit kann man sich Folgen aufgereit vorstellen[12] und schreibt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$. Meist interessiert man sich dafür, was die Folgenglieder tun, wenn n gegen Unendlich geht. Dem trägt folgender Begriff Rechnung:

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge in einem topologischen Raum $(\mathrm{X}, \mathfrak{X})$. Die Folge heißt *konvergent gegen* $a \in \mathrm{X}$, wenn es zu jeder Umgebung U von a ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodaß $x_n \in \mathrm{U}$ für alle $n \geqq n_0$. In diesem Fall heißt a Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Ist eine Folge nicht konvergent, so heißt sie *divergent*.

Anschaulich bedeutet das, daß man bei einer konvergenten Folge in jeder noch so kleinen Umgebung ihres Grenzwerts stets unendlich viele Folgenglieder findet. Allerdings sind in allgemeinen topologischen Räumen Grenzwerte von Folgen nicht eindeutig bestimmt; es kann sein, daß Folgen gegen mehrere Grenzwerte konvergieren. Ist X jedoch ein Hausdorff-Raum, dann ist die Konvergenz eindeutig, das heißt konvergente Folgen haben stets genau einen Grenzwert.

Wir gehen jetzt zu allgemeiner definierten Funktionen über, nämlich solchen von einem topologischen Raum in einen anderen, und kommen so zu den für die Topologie zentralen stetigen Funktionen. Dazu seien $(\mathrm{X}, \mathfrak{X})$ und $(\mathrm{Y}, \mathfrak{Y})$ topologische Räume und $f : \mathrm{X} \longrightarrow Y$ eine Funktion.

f heißt *stetig in* $x \in \mathrm{X}$, wenn für jede Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x existiert mit $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$.

f heißt stetig auf X, wenn f für alle $x \in \mathrm{X}$ stetig ist.

[10] Der Satz wurde erstmals von Tychonoff für beliebige Produkte des Einheitsintervalls bewiesen [376]; Tychonoff stellte wenige Jahre später fest, daß daraus bereits die allgemeine Version folgt [377]. Der erste explizite Beweis des Satzes in der allgemeinen Fassung stammt von Čech [54].

[11] Zum Beweis des Satzes von Tychonoff ist ebenfalls das Auswahlaxiom oder etwas dazu äquivalentes erforderlich; umgekehrt konnte Kelley beweisen, daß das Auswahlaxiom aus dem Satz von Tychonoff folgt [196], [197].

[12] Daher der Name

Dahinter steht die anschauliche Vorstellung, daß bei stetigen Funktionen lokal nicht viel passiert. Eine alternative Definition ist die folgende: $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ heißt stetig, wenn die Urbilder offener Mengen stets ebenfalls offen sind. Entsprechend gilt auch, daß f stetig ist, wenn die Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen oder wenn die Urbilder von Umgebungen Umgebungen sind.

Eine Funktion $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ heißt *folgenstetig*, wenn gilt: Aus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ in X folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ in Y. Folgenstetigkeit ist eine schwächere Eigenschaft als Stetigkeit; ist f stetig, so auch folgenstetig, das umgekehrte gilt jedoch nicht in allen Räumen. Erfüllt jedoch ein topologischer Raum X das erste Abzählbarkeitsaxiom und ist Y ein beliebiger topologischer Raum, dann ist eine Funktion $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ genau dann stetig, wenn sie folgenstetig ist[13].

Ist eine Funktion $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ bijektiv, dann existiert ihre *Umkehrfunktion* $f^{-1} : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$; für diese gilt $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in \mathrm{Y}$ sowie $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in \mathrm{X}$, oder anders ausgedrückt, $f^{-1}(y) = x$ gilt genau dann, wenn $f(x) = y$ gilt für alle $x \in \mathrm{X}$ und alle $y \in \mathrm{Y}$. Eine Funktion, die stetig ist und eine stetige Umkehrfunktion besitzt, heißt *homöomorph* oder ein *Homöomorphismus*. Zwei Mengen, zwischen denen eine umkehrbar stetige Funktion existiert, heißen konsequenterweise *zueinander homöomorph*. Dabei ist allerdings Vorsicht angebracht, denn eine stetige Bijektion ist noch lange nicht automatisch homöomorph; die Forderung, daß f und f^{-1} stetig sein müssen, ist wesentlich stärker. Auf jeden Fall ist eine stetige Bijektion $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ von einem quasikompakten Raum X auf einen Hausdorffraum Y stets ein Homöomorphismus.

Die Bedeutung homöomorpher Funktionen liegt darin, daß zwei Punktmengen topologisch nicht unterscheidbar sind, wenn es eine homöomorphe Funktion zwischen ihnen gibt. Das heißt, zwei solche Mengen haben exakt dieselben mengentheoretisch-topologischen Eigenschaften und unterscheiden sich nicht hinsichtlich Kompaktheit, Zusammenhangseigenschaften und dergleichen. Man sagt auch, solche Mengen seien *topologisch äquivalent*; entsprechend werden homöomorphe Abbildungen auch als *topologische Abbildungen* bezeichnet. Eigenschaften topologischer Räume, die unter topologischen Abbildungen erhalten bleiben, also Invarianten unter solchen Abbildungen, heißen *topologische Invarianten*. Das ist genau die zu Beginn dieses Kapitels angedeutete mathematische Formalisierung der anschaulichen Vorstellung, daß sich die Topologie mit Eigenschaften geometrischer Objekte beschäftigt, die unter beliebigen elastischen Verformungen erhalten bleiben. Dabei ist allerdings der Begriff der topologischen Abbildung allgemeiner als derjenige der elastischen Verformung, das heißt, nicht jede topologische Abbildung ist als elastische Verformung deutbar.

Der vorige Abschnitt zeigt exemplarisch, daß kompakte Mengen besonders pflegeleicht sind. Daher ist es zuweilen ärgerlich, daß natürlich längst nicht alle Mengen kompakt sind; unter gewissen Voraussetzungen kann man jedoch nicht kompakte Mengen wenigstens als Teilmengen kompakter Mengen auffassen. Das leistet die folgende

1.9 Definition: Eine *Kompaktifizierung* der Menge X ist eine kompakte Menge C mit einem Homöomorphismus $\varphi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{C}$, sodaß $\varphi(\mathrm{X})$ dicht in C ist.

[13] Auch zum Beweis dieser Aussage ist das Auswahlaxiom erforderlich.

Ein anschauliches Beispiel für eine Kompaktifizierung ist die stereographische Projektion des $\mathbb{R}^n$ auf die n-dimensionale Einheitssphäre S^n; hierbei wird mengenmäßig gesehen dem $\mathbb{R}^n$ ein weiteres Element, nämlich der unendlichferne Punkt ∞ hinzugefügt. Das zweite Beispiel, das wir hier betrachten, ist weniger anschaulich. Dazu sei $(X, \mathfrak{X})$ ein topologischer Raum. Eine *Stone-Čech-Compaktifizierung*[14] βX von X ist ein kompakter Hausdorff-Raum mit einer stetigen Abbildung $\varphi : X \longrightarrow \beta X$, sodaß für jeden kompakten Hausdorffraum C und jede stetige Abbildung $f : X \longrightarrow C$ eine eindeutig bestimmte Abbildung $\beta f : \beta X \longrightarrow C$ mit $f = \beta f \circ \varphi$ existiert. Die Stone-Čech-Kompaktifizierung von X ist der größte kompakte Hausdorff-Raum, für den $\varphi(X)$ eine dichte Teilmenge ist. Im allgemeinen liefert das eine sehr große Menge; beispielsweise gilt für die Stone-Čech-Kompaktifizierung $\beta\mathbb{N}$ der Menge der natürlichen Zahlen $|\beta\mathbb{N}| = \beth_2 = 2^{2^{\aleph_0}}$, das heißt, $\beta\mathbb{N}$ ist so groß wie die Potenzmenge der Menge der reellen Zahlen[15].

1.1.3 Topologie metrischer Räume

1.1.3.1 Metrische Topologien

Wir haben bisher in diesem Kapitel Lageeigenschaften von Punkten topologischer Räume ausschließlich über Mengenbeziehungen beschrieben. Das hat die bemerkenswerte Konsequenz, daß hierfür die Vorstellung irgendeines Abstandsbegriffs zwischen einzelnen Punkten oder Teilmengen des betrachteten Raums nicht erforderlich ist. Intuitiv liegt ist es natürlich nahe anzunehmen, daß es für Aussagen über die gegenseitige Lage von Punkten sicherlich hilfreich ist, wenn man etwas über Abstände zwischen diesen Punkten weiß. Dazu muß man jedoch erst einmal definieren, was man mit dem Abstand zwischen zwei Punkten meint, und das führt zu den Begriffen der Metrik und des metrischen Raums.

1.10 Definition: Sei X eine Menge. Eine *Metrik* auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

(ii) Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),

(iii) Für alle $x, y, z \in X$ gilt $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

(X, d) heißt *metrischer Raum*, $d(x, y)$ heißt *Abstand* der Punkte x und y bezüglich der Metrik d.

Gilt statt (i) nur $d(x, x) = 0$ für alle $x \in X$, dann heißt d *Pseudometrik*; in diesem Fall folgt

[14] Benannt nach E. Čech [54] und M. H. Stone [357], die diese Form der Kompaktifizierung unabhängig voneinander entdeckten. Genaugenommen taucht die Stone-Čech-Kompaktifizierung schon etwas früher bei Tychonoff auf, allerdings ohne explizit erwähnt zu werden [376].

[15] Für eine diskrete Menge X ist βX die Menge aller Ultrafilter auf X, wobei X durch die zugehörige Abbildung φ auf die Menge der Haupt-Ultrafilter auf X abgebildet wird. Auf jeder Menge X gibt es $2^{2^{|X|}}$ Ultrafilter.

aus $d(x, y) = 0$ nicht notwendigerweise $x = y$. Ist X ein metrischer Raum mit Metrik d und $\mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$, dann heißt

$$\operatorname{diam} \mathsf{Y} := \sup \{d(x, y) \mid x, y \in \mathsf{Y}\}$$

Durchmesser von Y. Der Durchmesser einer Menge kann endlich oder unendlich sein.

Wenn man zu einem gegebenen topologischen Raum $(\mathsf{X}, \mathfrak{X})$ eine Metrik finden kann, so daß die bezüglich dieser Metrik offenen Mengen gerade die vorgegebene Topologie liefern, heißt dieser topologische Raum *metrisierbar*[16]. Von wesentlicher Bedeutung ist die Tatsache, daß metrisierbare Räume stets das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Daraus folgt insbesondere, daß für die Dichte $\mathfrak{d}(\mathsf{X})$ und das Gewicht $\mathfrak{w}(\mathsf{X})$ eines jeden metrischen Raums X stets $\mathfrak{d}(\mathsf{X}) = \mathfrak{w}(\mathsf{X})$ gilt.

Wir betrachten einige Beispiele für Metriken[17]:

a) Jede Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) wird durch $d_{\mathsf{A}}(x, y) = d(x, y)$ für alle $x, y \in \mathsf{A}$ zu einem metrischen Raum. d_{A} heißt die durch d *induzierte Metrik* auf A.

b) Ist (X, d) ein metrischer Raum, dann liefert $d^*(x, y) := \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ für $x, y \in \mathsf{X}$ eine weitere Metrik auf X.

c) $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ werden zu metrischen Räumen durch $d(x, y) := |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$ beziehungsweise $x, y \in \mathbb{C}$.

d) Für $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ können beispielsweise durch

$$d_1(x, y) := \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu - y_\nu| \quad \text{oder}$$

$$d_2(x, y) := \left(\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu - y_\nu|^2\right)^{1/2} \quad \text{oder}$$

$$d_\infty(x, y) := \max_{\nu=1,2,\ldots,n} |x_\nu - y_\nu|$$

Metriken definiert werden[18].

e) Ist $\mathcal{V}$ ein normierter Vektorraum[19] mit Norm $\|\ \|$, dann erhält man mit $d(x, y) := \|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathcal{V}$ eine Metrik auf $\mathcal{V}$.

f) Auf jeder Menge X kann eine triviale Metrik definiert werden gemäß

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = y \\ 1 & \text{für} \quad x \neq y \end{cases} \qquad \text{für } x, y \in \mathsf{X}.$$

[16] Die Frage, welche Eigenschaften topologische Räume aufweisen müssen, um metrisierbar zu sein, wird durch sogenannte *Metrisationssätze* beantwortet. Eine Diskussion solcher Sachvehalte geht über den hier gesteckten Rahmen hinaus; näheres dazu findet man beispielsweise in [142] und [172].

[17] Beweis durch Nachrechnen

[18] Beispiel c) entspricht d_1 und d_2 für $n = 1$.

[19] Siehe Abschnitt 2.2.3.1.

In metrischen Räumen lassen sich spezielle Umgebungen definieren, die von grundlegender Bedeutung für die Analysis sind. Dazu sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann heißt die Menge $\mathrm{U}(x, \varepsilon) := \{\, y \in \mathrm{X} \mid d(x, y) < \varepsilon \,\}$ *ε-Umgebung* von x; dabei heißt ε Radius von $\mathrm{U}(x, \varepsilon)$. Eine Teilmenge $\mathrm{O} \subset \mathrm{X}$ heißt *offen*, wenn O mit jedem $x \in \mathrm{O}$ auch eine ε-Umgebung von x enthält. Die ε-Umgebungen sind selbst offene Mengen. Allgemeiner gilt: Eine Teilmenge eines metrischen Raums ist genau dann offen, wenn sie sich als Vereinigung von ε-Umgebungen darstellen läßt. Der Zusammenhang zum vorigen Abschnitt wird nun dadurch hergestellt, daß die so definierten offenen Mengen den Axiomen des topologischen Raums genügen. Das heißt, die offenen Mengen bilden eine Topologie, die sogenannte *metrische Topologie* $\mathfrak{X}_d$ auf X. In solchen topologischen Räumen $(\mathrm{X}, \mathfrak{X}_d)$ kann man nun die bisher rein mengentheoretisch erfaßten Begriffe auch über Abstandsbeziehungen beschreiben.

1.1.3.2 Kurze Einführung in die Epsilontologie

Wenn man bei den Definitionen von Konvergenz und Stetigkeit, die aus topologischer Sicht über offene Mengen und Umgebungen laufen, speziell ε-Umgebungen verwendet, landet man gerade bei den aus der Analysis vertrauten Formulierungen, wie wir gleich sehen werden.

Wir beginnen mit konvergenten Folgen. Es sei (X, d) wieder ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X konvergiert gegen $a \in \mathrm{X}$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $d(x_n, a) < \varepsilon$ für alle $n \geqq n_0$. In metrischen Räumen läßt sich diese Definition abschwächen: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge* oder *Fundamentalfolge*, wenn es für jedes $\varepsilon < 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geqq n_0$. Hier ist nirgends von einem Grenzwert die Rede; zwar ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge, aber Cauchy-Folgen konvergieren nicht notwendigerweise gegen einen Grenzwert. Metrische Räume, in denen jede Cauchy-Folge konvergiert, heißen *vollständig*. Für solche Räume gilt der

1.11 Satz von Baire: *Jeder vollständige metrische Raum ist von 2. Kategorie in sich.*

Das heißt, vollständige metrische Räume lassen sich nicht als abzählbare Vereinigungen nirgends dichter Mengen darstellen[20]. Insbesondere folgt daraus für einen vollständigen metrischen Raum $\mathcal{E}$ mit $\mathcal{E} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n$, daß mindestens eines der $\mathcal{E}_n$ einen inneren Punkt und damit auch eine offene Kugel enthält. Außerdem folgt aus dem Satz von Baire, daß abgeschlossene Unterräume vollständiger metrischer Räume selbst vollständig sind. Eine weitere wichtige Konsequenz der Vollständigkeit betrifft die Kompaktheitseigenschaften: Teilmengen von vollständigen metrischen Räumen sind genau dann präkompakt, wenn sie relativ kompakt sind, das heißt, die beiden Begriffe sind hier äquivalent.

Kommen wir nun zu den stetigen Funktionen, so finden wir bei metrischen Räumen genau die altbekannte ε-δ-Definition wieder. Sind $(\mathrm{X}, d_\mathrm{X})$ und $(\mathrm{Y}, d_\mathrm{Y})$ metrische Räume, dann heißt eine Funktion $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ stetig in $x_0 \in \mathrm{X}$, wenn folgendes gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so daß $d_\mathrm{Y}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ für alle $x \in \mathrm{X}$ mit $d_\mathrm{X}(x, x_0) < \delta$. Ist f stetig für alle $x \in \mathrm{X}$, dann heißt f stetig auf X, oder formal geschrieben:

[20] Zum Beweis und für weitere Details siehe beispielsweise [253].

$f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ heißt *stetig* auf X $:\Longleftrightarrow$

$$\forall x \in \mathrm{X}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \mathrm{X}\ \ (d_{\mathrm{X}}(x, y) < \delta \implies d_{\mathrm{Y}}(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Diese Definition führt auf die anschauliche Vorstellung, die man üblicherweise hat: Stetige Funktionen bilden Punkte, die in der Nähe voneinander liegen, auf wiederum in der Nähe voneinander liegende Bildpunkte ab. Da metrische Räume das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, sind in ihnen Stetigkeit und Folgenstetigkeit äquivalent. Entsprechend ist in metrischen Räumen die obige ε-δ-Definition der Stetigkeit äquivalent zur folgenden, anschaulichen Definition: f ist stetig in x, wenn $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ gilt[21].

Eine Verschärfung der Eigenschaft einer Funktion, stetig zu sein, liefert der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit:

$f : \mathrm{X} \longrightarrow Y$ heißt *gleichmäßig stetig* auf X $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathrm{X}\ \forall y \in \mathrm{X}\ \ (d_{\mathrm{X}}(x, y) < \delta \implies d_{\mathrm{Y}}(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Der Unterschied liegt in der Reihenfolge der Quantoren: Bei gleichmäßiger Stetigkeit ist ε von den $x \in \mathrm{X}$ unabhängig. Natürlich sind gleichmäßig stetige Funktionen insbesondere auch stetig, die Umkehrung gilt jedoch im allgemeinen nicht. Gleichmäßig stetige Funktionen auf metrischen Räumen weisen eine wichtige Fortsetzungseigenschaft auf.

1.12 Satz: *Es seien* X *ein metrischer und* Y *ein vollständiger metrischer Raum, außerdem sei* A *eine dichte Teilmenge von* X *und die Funktion* $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{Y}$ *gleichmäßig stetig auf* A. *Dann gibt es genau eine Funktion* $g : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ *mit* $g \upharpoonright \mathrm{A} = f$, *die gleichmäßig stetig auf* X *ist.*

Eine weitere Verschärfung liefert die absolute Stetigkeit:

$f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ heißt *absolut stetig* auf X, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für jede Folge $\{\mathrm{X}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von kompakten Teilmengen von X mit $\operatorname{diam} \mathrm{X}_n < \delta$ auch $\operatorname{diam} f(\mathrm{X}_n) < \varepsilon$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Absolut stetige Funktionen sind gleichmäßig stetig und damit auch stetig. Auch hier ist die Umkehrung im allgemeinen falsch[22]. Abermals stärker ist der Begriff der Lipschitz-Stetigkeit:

Eine Funktion $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ gibt, sodaß für alle $x, y \in \mathrm{X}$ die Relation $d_{\mathrm{Y}}(f(x), f(y)) \leqq L\, d_{\mathrm{X}}(x, y)$ gilt. Lipschitz-stetige Funktionen sind stets absolut stetig, das umgekehrte ist jedoch wieder im allgemeinen nicht der Fall[23].

Auch die Eigenschaft der Kompaktheit wird in metrischen Räumen sehr viel anschaulicher, als das in allgemeinen topologischen Räumen der Fall ist. Grundlage dafür ist folgender

1.13 Satz: *Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist abgeschlossen und beschränkt.*

[21] Das ist eine nichttriviale Aussage, denn auch hier kommt beim Beweis das Auswahlaxiom zum Einsatz.

[22] Die absolut stetigen Funktionen sind genau die fast überall differenzierbaren Funktionen.

[23] Es gibt sogar differenzierbare Funktionen, die nicht Lipschitz-stetig sind, etwa $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht, wie wir noch sehen werden. – Satz 1.13 hat weitreichende Konsequenzen, beispielsweise:

- Jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum ist beschränkt.
- Ist X ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt und $A \subset K$ abgeschlossen, dann ist auch A kompakt.
- Sind X und Y metrische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Funktion und $K \subset X$ kompakt, dann ist auch $f(K) \subset Y$ kompakt[24].

Insbesondere ist jeder kompakte metrische Raum vollständig. Außerdem sind stetige Funktionen auf kompakten Mengen stets gleichmäßig stetig. Erwähnt werden sollte auch der

1.14 Satz von Bolzano-Weierstraß: *Sei* A *eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes* X *und* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Punkten* $x_n \in A$. *Dann gibt es eine Teilfolge* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, *die gegen einen Punkt* $a \in A$ *konvergiert.*

Damit besagt der Satz von Bolzano-Weierstraß insbesondere auch, daß in abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen metrischer Räume jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Kompakte Teilmengen bieten Folgen gewissermaßen nicht genügend Platz, sodaß sie stets gegen womöglich unendlich viele Häufungspunkte gehen. Für den speziellen Fall des $\mathbb{R}^n$ gilt der

1.15 Überdeckungssatz von Heine-Borel: *Ist* $A \subset \mathbb{R}^n$ *abgeschlossen und beschränkt, dann kann man aus jeder offenen Überdeckung von* A *eine endliche Teilüberdeckung auswählen.*

Das ist aber nichts anderes als die Anwendung von Satz 1.13 auf den $\mathbb{R}^n$.

Das sollte als kurzer Überblick über die mengentheoretische Topologie für die hier verfolgten Ziele genügen. Wir bleiben im folgenden Abschnitt bei der Betrachtung von Mengen, wechseln dabei jedoch von der qualitativen zu einer mehr quantitativen Perspektive.

1.2 Grundbegriffe der Maß- und Integrationstheorie

Die Motivation, die zur Entdeckung der in diesem Abschnitt skizzierten Sachverhalte führt, ist die Frage, inwieweit es möglich ist, Mengen so etwas wie einen Inhalt zuzuordnen. Im einfachsten Fall kann man darunter das Volumen geometrischer Gebilde verstehen; es wird sich jedoch zeigen, daß es sich hierbei nur um einen Spezialfall handelt. Denn das, was man sich üblicherweise unter Teilmengen insbesondere überabzählbarer Mengen vorstellt, liefert nicht einmal die Spur einer Andeutung, welche Vielfalt von Teilmengen solcher Mengen es tatsächlich gibt. Entsprechend kann man den Inhaltsbegriff sehr weitgehend verallgemeinern, wobei man insbesondere keineswegs auf geometrische Interpretationen beschränkt ist.

[24] Das ist die Verallgemeinerung des Satzes vom Maximum und Minimum für reelle Funktionen.

1.2.1 Maße und Meßbarkeit

Maße sind Abbildungen, die den Teilmengen einer Menge im einfachsten Fall nichtnegative reelle Zahlen zuordnen; diese lassen sich dann in sehr allgemeiner Weise als Inhalte der Teilmengen auffassen. Der Begriff der Teilmenge einer Menge ist dabei allerdings ein sehr weitgefaßter und schwer zu überschauender Begriff; wie vielfältig die möglichen Teilmengen einer Menge sein können, sieht man etwa am Beispiel des $\mathbb{R}^n$, wenn man dessen Teilmengen ein wenig klassifiziert. Die einfachsten sind die (offenen, halboffenen oder abgeschlossenen) Intervalle oder Rechtecke. Bildet man beliebige endliche oder abzählbare Vereinigungen offener Intervalle, landet man schon bei einer wesentlich komplizierteren Klasse von Teilmengen, den sogenannten Borelmengen. Eine noch kompliziertere Klasse von Teilmengen sind die projektiven Mengen. Eine projektive Menge ist die Menge der Bildpunkte irgendeiner Funktion vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$ angewandt auf irgendein Intervall (man „projeziert“ das Intervall durch die Funktion vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$); entsprechend erhält man die Menge aller projektiven Mengen, indem man alle beliebigen Funktionen vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$ auf alle beliebigen Intervalle anwendet, und alle dabei herauskommenden Bildpunktemengen sammelt. Man muß nur genügend merkwürdige Funktionen heranziehen, um entsprechend merkwürdige projektive Mengen zu erhalten, die die abwegigsten Borelmengen locker in den Schatten stellen. Aber auch das ist noch nicht alles. Die Menge *aller* Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ geht wiederum weit darüber hinaus, und es gibt darin noch viel kompliziertere Teilmengen als die kompliziertesten projektiven Mengen. Daß ihre Mächtigkeit größer als diejenige des Kontinuums ist, ist dabei noch das kleinste Problem. Die Menge aller Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ oder irgendeiner anderen kontinuierlichen Menge sollte man sich auch nicht versuchsweise anschaulich vorstellen wollen.

Es deutet sich also bereits an, daß man auf Schwierigkeiten trifft, wenn man beliebigen Mengen Inhalte zuzuordnen versucht, und zwar nicht erst bei komplizierten oder sehr großen Mengen, sondern auch schon dann, wenn die Betrachtung zunächst „nur“ auf beliebige Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ oder irgendeines anderen Kontinuums beschränkt bleiben soll. Die Ausmaße dieser Schwierigkeiten lassen sich aus rein metrisch-topologischer Sicht nicht einmal erahnen; das liegt an den Abgründen, die sich im Zusammenhang mit Überlegungen zur Mächtigkeit des Kontinuums auftun. Bevor man im vorliegenden Zusammenhang einen Blick in diese Abgründe wirft, sollte man den Begriff des Maßes zunächst sorgfältig definieren. Die Eigenschaften, die man fordern könnte, sind intuitiv naheliegend: Ein Maß μ auf einer Menge M sollte

a) eine nicht identisch verschwindende Funktion $\mu : \mathfrak{P}(\mathrm{M}) \longrightarrow [0, \infty]$ sein, außerdem

b) *translationsinvariant*:

$$\mu(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A} + x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathrm{M},$$

c) *monoton*:

$$\mu(\mathrm{A}) \leqq \mu(\mathrm{B}) \quad \text{für } \mathrm{A} \subseteqq \mathrm{B}$$

d) und *abzählbar additiv*:

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\mathrm{A}_n), \quad \text{falls } \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots \text{ paarweise disjunkt.}$$

Natürlich interessiert man sich dabei für nichttriviale Maße, also nicht etwa für solche, die nur den Wert 0 oder nur den Wert ∞ annehmen. – Intuitiv naheliegend sind die Forderungen a) bis d) deswegen, weil dabei einfache Vorstellungen von Längen, Flächen- und Rauminhalten sowie deren höherdimensionale Verallgemeinerungen im Hintergrund stehen; dennoch ist das bereits zuviel verlangt. So zeigten beispielsweise Vitali und Hausdorff für den Fall der reellen Zahlen, daß Forderung b) nicht erfüllbar ist: Es gibt kein translationsinvariantes Maß auf $\mathbb{R}$ oder irgendeinem abgeschlossenen Intervall [141], [381]. Potenzmengen von Mengen der Mächtigkeit des Kontinuums sind zu groß, um darauf Maße mit den gewünschten Eigenschaften definieren zu können – oder zu klein, wenn man die Forderung nach Translationsinvarianz wegläßt[25]. Denn dann ändert sich die Sache, wenn man zu noch sehr viel größeren Mengen übergeht, nämlich zu solchen von mindestens meßbarer Kardinalität. Um diesen Begriff zu erklären müssen wir Eigenschaft (2) verallgemeinern: Ein Maß μ auf einer Menge M heißt λ-*additiv*, wenn für jedes $\gamma < \lambda$ und jede Familie $\{\, \mathrm{A}_\chi \mid \chi < \gamma \,\} \subseteq \mathfrak{P}(\mathrm{M})$ paarweise disjunkter Mengen $\mu\big(\bigcup_{\chi<\gamma} \mathrm{A}_\chi\big) = \sum_{\chi<\gamma} \mu(\mathrm{A}_\chi)$ gilt. Dabei kann ein Maß auf einer Menge der Mächtigkeit κ auch κ-additiv sein. Eine überabzählbare Kardinalzahl κ heißt *meßbar*, wenn es ein nichttriviales, κ-additives, $\{0, 1\}$-wertiges Maß auf κ gibt. In diesem Fall gibt es auf κ überhaupt nur κ-additive Maße, auch solche, die $[0, \infty]$-wertig sind[26]. Meßbare Kardinalzahlen sind wie oben angedeutet *sehr viel* größer als nur unerreichbare Kardinalzahlen[27]. Auf solchen Mengen gibt es stets nichttriviale Maße.

Allerdings hilft das für das ursprüngliche Problem der Frage nach der Meßbarkeit beliebiger Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ auch nicht wirklich weiter; man findet sich dann nämlich mit zwei gleichermaßen problematischen Alternativen konfrontiert. Banach und Kuratowski konnten einerseits zeigen, daß es unter der Annahme der Kontinuumshypothese kein nichttriviales Maß auf $[0, 1]$ gibt [23]. Da sie dabei nur von rein mengentheorethischen Begriffen Gebrauch machten, gilt dieses Resultat für alle Mengen der Mächtigkeit $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$. Man könnte nun natürlich den Spieß umdrehen und die Kontinuumshypothese verwerfen. Doch wenn das wirklich etwas nützen soll, macht es alles noch viel komplizierter, wie Ulam [378] und später Solovay [348], [349] herausgefunden haben. Die Annahme der Nicht-Gültigkeit der Kontinuumshypothese ist unter der Voraussetzung, daß es meßbare Kardinalzahlen gibt, mit der Annahme verträglich, daß es auch nichttriviale Maße auf beliebigen Mengen der Mächtigkeit von $\mathbb{R}$

[25] Dadurch wird das Problem insbesondere von geometrischen Betrachtungen befreit, sodaß der Begriff des Maßes auf beliebige Mengen angewandt werden kann.

[26] Alternativ kann man meßbare Kardinalzahlen auch über Ultrafilter definieren: Eine überabzählbare Kardinalzahl κ heißt meßbar, wenn es einen κ-vollständigen Ultrafilter auf κ gibt, der kein Hauptfilter ist.

[27] Die meßbaren Kardinalzahlen wurden von Ulam entdeckt, der auch gleich zeigte, daß sie mindestens unerreichbar sind [378]. Daß die kleinste meßbare Kardinalzahl tatsächlich größer ist als die kleinste unerreichbare, wurde erst nach und nach von Erdös und Tarski [94], Erdös und Hajnal [93] sowie Rowbottom [318] gezeigt.

gibt, nur wird diese dann plötzlich sehr, sehr groß[28]. Denn aus der zweiten Annahme folgt die Existenz schwach unerreichbarer Kardinalzahlen, die kleiner als $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ sind. $2^{\aleph_0}$ ist dann zwar immer noch viel kleiner als jede stark unerreichbare Kardinalzahl, aber viel größer als $\aleph_1$. Mit anderen Worten: Nur wenn sich das Kontinuum als ungeahnt groß erweist, bietet es Platz für nichttriviale Maße[29]. Intuitiv neigt man dazu, auch für den Fall der Nichtgültigkeit der Kontinuumshypothese die Mächtigkeit des Kontinuums deutlich kleiner als die kleinste schwach unerreichbare Kardinalzahl einzuschätzen, was solche Maße nicht zulassen würde. Ganz egal, für welche dieser Möglichkeiten man sich entscheidet, in jedem Fall erweist sich das Problem der Meßbarkeit überabzählbarer Mengen als äußerst vertrackt[30].

Um solchen Problemen aus dem Weg zu gehen, ist es am einfachsten, nicht nach Maßen auf der gesamten Potenzmenge der betrachteten Menge zu suchen, sondern sich auf eine Teilmenge von letzterer oder genauer gesagt auf ein System von in gewissem Sinn vernünftigen Teilmengen der Menge zu beschränken. Das leistet die folgende

1.16 Definition: Ein System $\mathfrak{S}$ von Teilmengen einer Menge M heißt *σ-Algebra*, wenn folgendes gilt:

(i) $\emptyset \in \mathfrak{S}$ und $\mathsf{M} \in \mathfrak{S}$,

(ii) Sind $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathfrak{S}$, dann sind auch $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} \in \mathfrak{S}$, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \in \mathfrak{S}$ und $\mathsf{A} \setminus \mathsf{B} \in \mathfrak{S}$,

(iii) Sind $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots \in \mathfrak{S}$, dann sind auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{A}_n \in \mathfrak{S}$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathsf{A}_n \in \mathfrak{S}$.

Ist $\mathscr{A}$ eine beliebige Familie von σ-Algebren auf einer Menge M, dann ist $\bigcap \mathscr{A}$ ebenfalls eine σ-Algebra auf M, während $\bigcup \mathscr{A}$ im allgemeinen keine σ-Algebra ist. Bildet man zu $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{P}(\mathsf{M})$ den Durchschnitt aller σ-Algebren auf M, die $\mathfrak{F}$ enthalten, dann liefert das die kleinste σ-Algebra auf M, die $\mathfrak{F}$ enthält; man nennt sie die von $\mathfrak{F}$ *erzeugte* σ-Algebra und schreibt dafür $\sigma(\mathfrak{F})$. Dabei gilt $|\sigma(\mathfrak{F})| \leqq |\mathfrak{P}(\mathsf{M})|$, und für unendliche σ-Algebren folgt daraus $|\mathfrak{S}| \geqq \mathfrak{c}$. Eine σ-Algebra $\mathfrak{S}$ auf M heißt *abzählbar erzeugt*, wenn es ein abzählbares Mengensystem $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{P}(\mathsf{M})$ gibt mit $\mathfrak{S} = \sigma(\mathfrak{T})$. Wenn das kleinste $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{S} = \sigma(\mathfrak{T})$ überabzählbar ist, heißt $\mathfrak{S}$ *überabzählbar erzeugt*. Ist $\mathfrak{S}$ abzählbar erzeugt, dann gilt $|\mathfrak{S}| = \mathfrak{c}$, ist $\mathfrak{S}$ überabzählbar erzeugt, dann gilt $|\mathfrak{S}| > \mathfrak{c}$.

Natürlich ist $\mathfrak{P}(\mathsf{M})$ eine und damit die größte σ-Algebra auf M. Andere, weniger triviale und damit für die Maßtheorie nützlichere Beispiele erhält man, wenn man als Menge M einen topologischen Raum wählt. Ist $\mathfrak{M}$ eine Topologie auf M, dann heißt $\sigma(\mathfrak{M})$ *Borel-Algebra* des topologischen Raums $(\mathsf{M}, \mathfrak{M})$. Man schreibt dafür meist $\mathfrak{B}(\mathsf{M})$, wobei unberücksichtigt bleibt, daß $\mathfrak{B}(\mathsf{M})$ natürlich von der gewählten Topologie abhängt. $\mathfrak{B}(\mathsf{M})$ ist gleichzeitig die kleinste σ-Algebra, die alle bezüglich dieser Topologie offenen Teilmengen von M enthält. Die Elemente von $\mathfrak{B}(\mathsf{M})$ nennt man *Borel-Mengen* von M (wieder bezüglich der gewählten

[28] Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die zweite Annahme keineswegs aus der ersten folgt; man kann lediglich die relative Konsistenz dieser beiden beweisen.

[29] Genaueres dazu steht beispielsweise in [66].

[30] Detaillierte Informationen zur Meßbarkeit großer Mengen und über meßbare Kardinalzahlen findet man in [72] und [187].