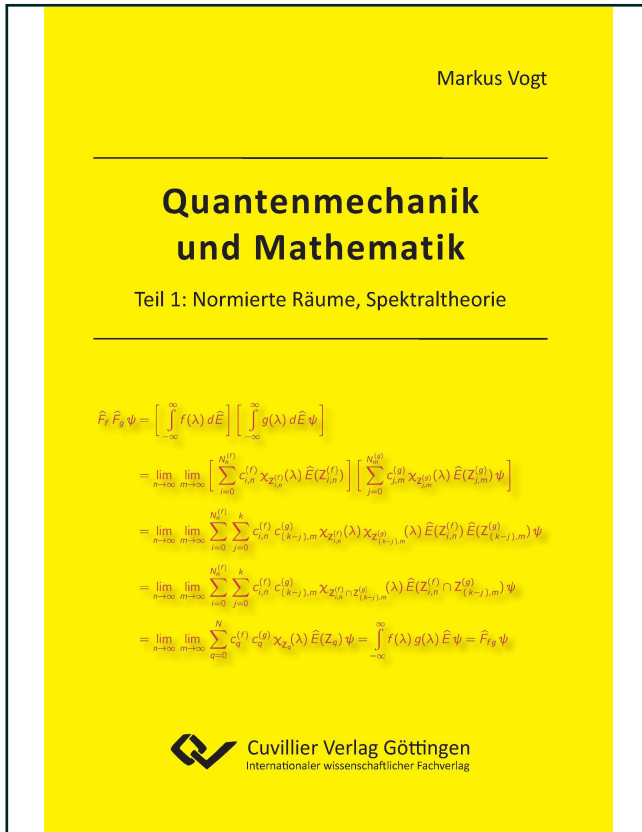




Markus Vogt (Autor)  
**Quantenmechanik und Mathematik**  
Teil 1: Normierte Räume, Spektraltheorie



<https://cuvillier.de/de/shop/publications/6513>

Copyright:

Cuvillier Verlag, Inhaberin Annette Jentsch-Cuvillier, Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen, Germany  
Telefon: +49 (0)551 54724-0, E-Mail: info@cuvillier.de, Website: <https://cuvillier.de>



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>4</b>
<b>Einleitung</b>	<b>6</b>
<b>1 Mathematische Grundlagen</b>	<b>9</b>
1.1 Elementare Topologie . . . . .	9
1.1.1 Notationen und Begriffe aus der Mengenlehre . . . . .	10
1.1.2 Offene Mengen . . . . .	11
1.1.2.1 Topologische Räume . . . . .	11
1.1.2.2 Umgebungen . . . . .	12
1.1.2.3 Kompaktheit . . . . .	14
1.1.2.4 Konvergenz und Stetigkeit . . . . .	16
1.1.3 Topologie metrischer Räume . . . . .	18
1.1.3.1 Metrische Topologien . . . . .	18
1.1.3.2 Kurze Einführung in die Epsilontologie . . . . .	20
1.2 Grundbegriffe der Maß- und Integrationstheorie . . . . .	22
1.2.1 Maße und Meßbarkeit . . . . .	23
1.2.2 Integrale und integrierbare Funktionen . . . . .	33
<b>2 Vektorräume</b>	<b>42</b>
2.1 Einige Grundbegriffe aus der linearen Algebra . . . . .	42
2.1.1 Algebraische Strukturen . . . . .	43
2.1.1.1 Gruppen, Ringe, Körper . . . . .	43
2.1.1.2 Moduln und Vektorräume . . . . .	44
2.1.2 Linearkombinationen und Erzeugendensysteme . . . . .	47
2.2 Topologische Vektorräume . . . . .	50
2.2.1 Einleitende Betrachtungen . . . . .	50
2.2.2 Lokalkonvexe Räume . . . . .	52
2.2.3 Banachräume . . . . .	56
2.2.3.1 Normierte Räume . . . . .	56
2.2.3.2 Definition und Beispiele für Banachräume . . . . .	57
2.2.3.3 Unendliche Reihen . . . . .	61
2.2.3.4 Lineare Abbildungen . . . . .	68



2.2.3.5	Kompakte Abbildungen . . . . .	80
2.2.3.6	Unbeschränkte lineare Abbildungen . . . . .	86
2.2.3.7	Lineare Funktionale . . . . .	87
2.2.3.8	Basen in Banachräumen . . . . .	99
2.2.3.9	$\mathcal{L}^p$ -Räume . . . . .	116
2.2.3.10	$\ell^p$ -Räume . . . . .	158
2.2.3.11	Orthogonalität in Banachräumen . . . . .	175
2.3	Hilberträume . . . . .	182
2.3.1	Definition und erste Eigenschaften . . . . .	182
2.3.2	Wann sind Banachräume Hilberträume? . . . . .	188
2.3.3	Vollständige Orthonormalsysteme . . . . .	199
2.3.4	Einige Beispiele . . . . .	210
2.3.4.1	$\mathcal{L}^2$ -Räume . . . . .	211
2.3.4.2	$\ell^2$ -Räume . . . . .	212
2.3.4.3	Fastperiodische Funktionen . . . . .	213
<b>3</b>	<b>Operatoren auf Hilberträumen</b> . . . . .	<b>215</b>
3.1	Einige Grundbegriffe . . . . .	215
3.2	Lineare Operatoren . . . . .	217
3.2.1	Symmetrische Operatoren . . . . .	219
3.2.2	Normale und selbstadjungierte Operatoren . . . . .	222
3.2.3	Orthogonale Projektoren . . . . .	239
3.2.4	Kompakte Operatoren . . . . .	243
3.2.5	Unitäre Operatoren . . . . .	246
<b>4</b>	<b>Ein wenig Spektraltheorie</b> . . . . .	<b>251</b>
4.1	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	251
4.2	Die Resolvente . . . . .	252
4.2.1	Definition und grundlegende Eigenschaften . . . . .	252
4.2.2	Der Funktionalkalkül . . . . .	255
4.2.3	Singularitäten der Resolvente . . . . .	259
4.3	Spektren linearer Abbildungen . . . . .	261
4.3.1	Einige vorbereitende Bemerkungen . . . . .	261
4.3.2	Beschränkte Abbildungen . . . . .	264
4.3.3	Kompakte Abbildungen . . . . .	268
4.3.4	Selbstadjungierte Operatoren . . . . .	272
4.4	Der Spektralsatz . . . . .	281
4.4.1	Der Spektralsatz für kompakte Operatoren . . . . .	281
4.4.1.1	Spektraldarstellung kompakter Operatoren . . . . .	281
4.4.1.2	Schmidt-Darstellung . . . . .	285
4.4.1.3	Die Spur . . . . .	300
4.4.1.4	Unendliche Determinanten . . . . .	310
4.4.2	Der Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren . . . . .	318



## INHALTSVERZEICHNIS

3

4.4.2.1	Spektralscharen . . . . .	319
4.4.2.2	Spektralzerlegung selbstadjungierter Operatoren . . . . .	322
4.4.2.3	Funktionen von Operatoren . . . . .	342
4.4.2.4	Spektralmaße und Spektralintegrale . . . . .	344
4.4.2.5	Spektralzerlegung normaler Operatoren . . . . .	351
4.4.2.6	Unitäre Äquivalenz und Multiplikationsoperatoren . . . . .	371
4.4.2.7	Diskrete, absolut stetige und singuläre Spektren . . . . .	382
4.4.3	Der Spektralsatz für unitäre Operatoren . . . . .	389
4.4.3.1	Spektralzerlegung unitärer Operatoren . . . . .	389
4.4.3.2	Stark stetige unitäre Gruppen . . . . .	392
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>411</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>415</b>