

1 Einleitung

Wirbelstromverluste in elektrischen Maschinen führen nicht nur zu einer Verringerung des Wirkungsgrades sondern sie bewirken zusätzlich eine eventuell unerwünschte Erwärmung von Bauteilen. Während im ersten Fall wirtschaftliche Aspekte eine Reduzierung interessant machen, kann sie im zweiten Fall aus technischen Gründen zwingend notwendig sein: Wirbelstromverluste in den Magneten permanentmagneterregter Synchronmaschinen (PMSM) und die damit verbundene Erwärmung kann unter ungünstigen Bedingungen zu ihrer irreversiblen Entmagnetisierung führen. Ähnlich sieht es bei Druckplattenverlusten in Großgeneratoren aus: Aus ihnen resultiert nicht nur ein schlechterer Wirkungsgrad des Generators sondern die Erwärmung kann auch zu mechanischen Problemen führen. Man ist daher bereits früh im Auslegungsprozess an der Kenntnis der Wirbelstromverluste interessiert, um geeignete Gegenmaßnahmen einleiten zu können. Im Falle des Großgenerators könnten diese beispielsweise aus einer Schirmung der Druckplatte gegen das verlustanregende Außenfeld bestehen.

Die Berechnung der Wirbelstromverluste kann mit numerischen Methoden (insbesondere Finite Elemente Methode) oder mit Hilfe analytischer Verfahren erfolgen. Analytische Methoden haben in der Regel den Vorteil, dass die Lösung der entstehenden Gleichungssysteme mit deutlich geringerem Rechenaufwand verbunden ist, als es bei numerischen Methoden der Fall ist. Dies resultiert im Regelfall in einer deutlich kürzeren Rechenzeit. Der Nachteil besteht in der Modellierungsgenauigkeit: Die Berücksichtigung von Sättigungseinflüssen ist mit ihnen nicht möglich und komplexe Geometrien können typischer Weise nur unter Einsatz grober Näherungen und mit entsprechenden Abweichungen im Ergebnis berechnet werden.

Während die numerischen Berechnungsverfahren in den letzten beiden Jahrzehnten aufgrund immer leistungsfähigerer Rechnertechnologie deutliche Fortschritte gemacht haben, wurden die analytischen Berechnungsverfahren kaum weiter entwickelt. Bei den numerischen Berechnungsverfahren stellen jedoch nach wie vor die Ermittlung von Verlusten in elektrisch leitfähigen, hochpermeablen ein großes Problem dar. Aufgrund der kleinen Eindringtiefen ist hier ein hoher Vernetzungsaufwand mit pathologischen Elementen nötig, aus dem entsprechend hohe Elementanzahlen und damit große Modelle mit langen Rechenzeiten resultieren. Sie sind daher für den Auslegungsprozess nur bedingt geeignet.

Das Hauptaugenmerk der Arbeit liegt daher auf der Entwicklung moderner analytischer Berechnungsmodelle für ausgewählte Wirbelstromprobleme in elektrischen Maschinen. Ferner sollen neue numerische Ansätze betrachtet werden, die eine effiziente Behandlung von hochpermeablem, elektrisch leitfähigem Material ermöglichen.

Im ersten Kapitel werden Verfahren vorgestellt, mit denen eine Rotor- oder Statornutung in den analytischen Berechnungsansatz einbezogen werden können. Während der eine vorgestellte Ansatz bekannt ist, handelt es sich bei der zweiten Methode um ein neuartiges Verfahren. Bei dieser werden Übergänge zwischen Bereichen verschiedener Permeabilität jeweils durch eine Kantenstromdichte abgebildet.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit der Entwicklung von Berechnungsmodellen zur Bestimmung von Wirbelstromverlusten in den Magneten von PMSM. Insgesamt werden fünf unterschiedliche Methoden vorgestellt, die sich durch den Ansatz der Feldgleichungen voneinander unterscheiden. Alle Verfahren zeichnen sich dadurch aus, dass sowohl die statorfeldbedingten als auch die nutungsbedingten Verluste mit ihnen erfasst werden können. Nach Vorstellung und Vergleich der analytischen Modelle wird die grundsätzliche Charakteristik der Wirbelstromverluste im Permanentmagneten untersucht. Dabei zeigt sich, dass es oberhalb kritischer Werte der Frequenz sowie der Material- oder Geometrieparameter aufgrund von Maßnahmen, die eigentlich zur Verlustreduktion gedacht waren, zu einem unerwarteten aber signifikanten Anstieg der Verluste kommen kann. Die hierdurch bewirkte unerwünschte Erwärmung kann zur Entmagnetisierung der Magnete und somit zur Zerstörung der Maschine führen. Die Untersuchung erfolgt sowohl für die statorfeld- als auch für die nutungsbedingten Verluste. Durch geeignete Normierung der Ergebnisse ergibt sich eine Darstellung, die den gesamten praxisrelevanten Parameterbereich abdeckt. Das postulierte Verhalten wird durch Messungen überprüft.

In Kapitel drei wird die Abschirmung hochpermeabler Materialien gegen niederfrequente magnetische Felder betrachtet. Mit Hilfe eines analytischen Modells wird zunächst die Wirkungsweise eines Schirms aus elektrisch leitfähigem Material in Abhängigkeit von Material- und Geometrieparametern untersucht. Darauf folgend wird ein neues Schirmkonzept untersucht, bei dem zusätzlich zur leitfähigen Schirmschicht eine weitere Schicht aus schwach permeablem Material eingefügt wird. Anschließend werden analytische Berechnungsmodelle vorgestellt, mit denen die beim Schirmungsproblem auftretenden Randeffekte untersucht werden können. Die Berechnungsansätze reichen vom Verfahren mit stark vereinfachtem Feldansatz bis zur hochgenauen Methode mit vollständig dreidimensionaler Feldverteilung.

Im letzten Kapitel wird ein numerisches Verfahren vorgestellt, mit dem die effiziente transiente Berechnung von Wirbelstromverlusten in hochpermeablen elektrisch leitfähigen Materialien unter Berücksichtigung der Sättigung möglich ist. Das neue Verfahren bewirkt gegenüber bekannten Verfahren eine deutliche Steigerung der Berechnungsgeschwindigkeit. Seine Genauigkeit wurde mit einem messtechnischen Aufbau verifiziert.

2 Analytische Modelle zur Berücksichtigung von Nutungseffekten

Bei einer Vielzahl von Anwendungen im Bereich elektrischer Maschinen interessiert man sich für den Einfluss der Stator- und/ oder Rotornutung auf das resultierende Luftspaltfeld. Während die Berücksichtigung der Nutung bei der Finiten-Elemente-Methode (FEM) ohne großen Aufwand möglich ist, ist dies bei analytischen Feldberechnungen deutlich komplizierter. Um den Einfluss der Nutung bei diesen zu berücksichtigen, existieren verschiedene Verfahren, die sich grob in drei Gruppen gliedern lassen: Bei der ersten Gruppe wird die Nutung über eine magnetische Leitwertfunktion oder eine variable Luftspaltweite berücksichtigt [1]-[9]. Dabei kann die Leitwertfunktion zum Beispiel aus einer Berechnung des Nutfeldes mit Hilfe einer konformen Abbildung gewonnen werden [3]-[5]. Ein alternatives Vorgehen ist die Ableitung der Leitwertfunktion aus dem Nutfeld, welches mit einer numerischen Feldberechnung gewonnen wurde [6]-[8]. So wird der Verlauf des Leitwertes in [6] im ersten Schritt mit Hilfe des bekannten Carter-Faktors berücksichtigt und dieser Ansatz mit den Ergebnissen einer numerischen Berechnung korrigiert. In [7] wird der Feldverlauf unter Einsatz von FEM berechnet und durch sinus- und kosinusförmige Abschnitte sowie Geradenstücke nachgebildet. Anschließend wird aus dem sich daraus ergebenden Feldverlauf der Leitwert bestimmt. Der Vorteil beim Einsatz numerischer Berechnungsverfahren ist (wie in [8] gezeigt wurde), dass auch komplexere Nutformen berücksichtigt werden können. Beim Einsatz der konformen Abbildung ist in der Regel nur die Berücksichtigung einer rechteckigen und unendlich tiefen Nut möglich. Eine Alternative bei der Ermittlung der Leitwertfunktion stellt der Einsatz von magnetischen Widerständen in Verbindung mit einer Modulationsfunktion dar [9]. An Stelle einer Leitwertfunktion kann auch eine geeignete Randbedingung für den Übergang vom genuteten zum ungenuteten Bereich aufgestellt werden [40]. Dabei wird mit Hilfe einer konformen Abbildung eine Ersatzkontur für den entsprechenden Rand bestimmt. Im Bereich der Ersatzkontur wird ein 1-dimensionaler Feldverlauf angenommen, so dass das Durchflutungsgesetz zur Ermittlung der Randbedingung angewendet werden kann.

Ein wesentlicher Nachteil der bisher aufgezählten Verfahren besteht darin, dass zwar das Feld im Luftspalt bekannt ist, jedoch das Feld innerhalb einer Nut und des angrenzenden Eisens unbekannt bleibt. Wird das Feld innerhalb der Nut (beispielsweise zur Induktivitätsberechnung [11]) benötigt, können diese Verfahren nicht eingesetzt werden. Eine Alternative stellt in diesem Fall das Sub-Domänen-Verfahren dar. Dabei wird jeder Nut eine Sub-Domäne zugewiesen, in der ein periodischer Feldverlauf angesetzt wird [10]-[16]. Die physikalischen Randbedingungen auf den Nutkanten müssen in diesem Fall durch geeignet angesetzte periodische mathematische Randbedingungen erfüllt werden. Bei diesem Verfahren wird das Feld innerhalb der Nut berechnet, nicht jedoch im angrenzenden Eisen. Das Verfahren ist im Gegensatz zur Verwendung konformer Abbildungen deutlich anschaulicher und einfacher anzuwenden. Mit dem Sub-Domänen-Verfahren ist auch die Berechnung von permanentmagneterregten Synchronmaschinen mit Oberflächenmagneten möglich, deren Pollücken mit Eisen gefüllt sind [14]. Oftmals wird das Verfahren bezüglich der Wellendarstellung nicht ganz korrekt angewendet (z. B. [10], [13]): Man erhält in diesem Fall

die örtliche Fourierreihenentwicklung des Feldes für einen festen Zeitpunkt, jedoch keine für alle Zeitpunkte gültige Wellendarstellung. Richtig wäre eine Fourierreihe in Ort und Zeit, z. B. [16].

Die dritte Möglichkeit besteht darin, den Übergang zwischen Nut und Eisen durch eine Kantenstromdichte abzubilden. Dieses Verfahren wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelt und bietet den Vorteil, dass bei der Lösung der Felddifferentialgleichung auch das Feld im Eisen bestimmt wird. Der Nachteil besteht darin, dass die Felddifferentialgleichung in ein Differentialgleichungssystem übergeht.

Im Folgenden wird das Sub-Domänen-Verfahren und das Kantenstromdichteverfahren näher betrachtet. Die durchgeführten Berechnungen orientieren sich an der in Abbildung 2.1 gezeigten Geometrie einer permanentmagneterregten Synchronmaschine (PMSM) mit genutetem Stator. Die Nutform ist bewusst einfach gehalten. Grundsätzlich ist bei den beiden vorgestellten Verfahren auch die Berücksichtigung komplexerer Nutformen möglich, solange die Nuten ausschließlich rechte Winkel aufweisen. Der Stator verfügt über n_n Nuten mit der Nutbreite b_n und der Höhe

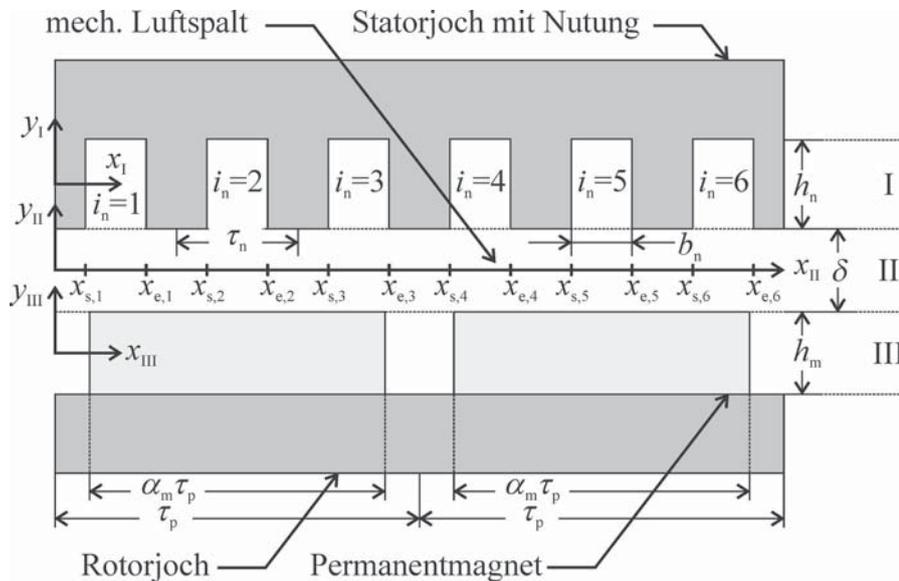


Abbildung 2.1: Abgewickelte Darstellung einer rotierenden, periodischen PMSM mit genutetem Stator

h_n . Die Nutteilung ergibt sich mit der Polpaarzahl p und der Erregerpolteilung τ_p zu

$$\tau_n = 2p\tau_p/n_n. \quad (2.1)$$

Die Polpaarzahl p ist an dieser Stelle die Anzahl der Erregerpolpaare einer Elementarmaschine (kleinste Periode einer elektrischen Maschine). Die Nut i_n erstreckt sich über den Bereich $x = x_{s,i_n} \dots x_{e,i_n}$ mit

$$x_{s,i_n} = (i_n - 1)\tau_n + \frac{\tau_n - b_n}{2}, \quad (2.2)$$

$$x_{e,i_n} = (i_n - 1)\tau_n + \frac{\tau_n + b_n}{2}. \quad (2.3)$$

2.1 Beschreibung der Nutung durch Sub-Domänen

In diesem Abschnitt wird ein Verfahren vorgestellt, bei dem die Nutung mit Hilfe sogenannter Unterdomänen in der analytischen Feldberechnung berücksichtigt wird. Dazu wird für jede Nut ein eigener Berechnungsbereich (die sogenannte Sub-Domäne) eingeführt, in dem die Felddifferentialgleichung gelöst wird. Damit ergibt sich für jede einzelne Nut i_n eine eigene Felddlösung, die so angepasst werden kann, dass die gewünschten Randbedingungen erfüllt werden. Zur Vereinfachung der Rechnung wird angenommen, dass für die relative Permeabilität des Eisens im Bereich zwischen den Nuten $\mu_{r,Fe} \rightarrow \infty$ gilt.

2.1.1 Lösung der Felddifferentialgleichung für Nutbereich

Die Berechnung des Flussdichteverlaufs erfolgt indirekt über die Berechnung des magnetischen Vektorpotentials. Da es sich um ein zweidimensionales Problem in der xy -Ebene handelt, weist das Vektorpotential nur eine z -Komponente auf. Sein Verlauf wird durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} = 0 \quad (2.4)$$

beschrieben. Die Ermittlung des Vektorpotentials erfolgt für jede Nut i_n separat. Zur Lösung der Differentialgleichung (2.4) wird längs der x -Achse Periodizität der Lösung vorausgesetzt. Da diese physikalisch nicht gegeben ist, müssen die Randbedingungen auf den Rändern der Nut später durch geeignete Randbedingungen auf den mathematischen Rändern erzwungen werden. Aufgrund der angenommenen Periodizität ist die Entwicklung des Vektorpotentials V_{zI_n} der Nut i_n längs der x -Achse in eine Fourierreihe möglich:

$$V_{zI_n} = \sum_v \sum_k \hat{V}_{zI_n,(v,k)} \exp(j(\nu\omega t + ka_{xn}x)). \quad (2.5)$$

Die Periodenlänge entspricht der doppelten Nutbreite, so dass sich die Wellenkonstante zu

$$a_{xn} = \frac{\pi}{b_n} \quad (2.6)$$

ergibt. Wird der Separationsansatz (2.5) in (2.4) eingesetzt, ergibt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Amplituden des Vektorpotentials

$$\underbrace{(ka_{xn})^2}_{\gamma_{I,k}^2} \hat{V}_{zI_n,(v,k)} - \frac{\partial^2 \hat{V}_{zI_n,(v,k)}}{\partial y^2} = 0. \quad (2.7)$$

Als Lösung ergibt sich eine Linearkombination von Hyperbelfunktionen:

$$\hat{V}_{zI_n,(v,k)} = A_{I_n,(v,k)} \frac{\sinh(\gamma_{I,k}y)}{\cosh(\gamma_{I,k}h_n/2)} + B_{I_n,(v,k)} \frac{\cosh(\gamma_{I,k}y)}{\cosh(\gamma_{I,k}h_n/2)}. \quad (2.8)$$

Die Flussdichte ergibt sich mit $\vec{B} = \text{rot } \vec{V}$, so dass man

$$B_{xI_n} = \sum_{\nu} \sum_k \hat{B}_{xI_n,(\nu,k)} \exp(j(\nu\omega t + ka_{xn}x)), \quad (2.9)$$

$$B_{yI_n} = \sum_{\nu} \sum_k \hat{B}_{yI_n,(\nu,k)} \exp(j(\nu\omega t + ka_{xn}x)) \quad (2.10)$$

mit den Amplituden

$$\hat{B}_{xI_n,(\nu,k)} = \gamma_{1,k} \left(A_{I_n} \frac{\cosh(\gamma_{1,k}y)}{\cosh(\gamma_{1,k}h_n/2)} + B_{I_n} \frac{\sinh(\gamma_{1,k}y)}{\cosh(\gamma_{1,k}h_n/2)} \right), \quad (2.11)$$

$$\hat{B}_{yI_n,(\nu,k)} = -jka_x \left(A_{I_n} \frac{\sinh(\gamma_{1,k}y)}{\cosh(\gamma_{1,k}h_n/2)} + B_{I_n} \frac{\cosh(\gamma_{1,k}y)}{\cosh(\gamma_{1,k}h_n/2)} \right) \quad (2.12)$$

erhält. Die Konstanten müssen im Folgenden so gewählt werden, dass die geforderten physikalischen Randbedingungen auf den Nuträndern bei $x = x_{s,i_n}$ und $x = x_{e,i_n}$ erfüllt werden: Die Feldlinien der Flussdichte treten senkrecht von der Luft in das Eisen ein. Da man sich nur für den Feldverlauf innerhalb der Nut interessiert, kann der Verlauf außerhalb des Nutbereichs beliebig fortgesetzt werden. Spiegelt man die y -Komponente der Flussdichte im Bereich der Nutöffnung auf dem Rand $y_I = -h_n/2$ jeweils bei $x = x_{s,i_n}$ und $x = x_{e,i_n}$, so ergibt sich innerhalb der Nut der geforderte Feldverlauf. Dieser Vorgang ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Wird die y -Komponente

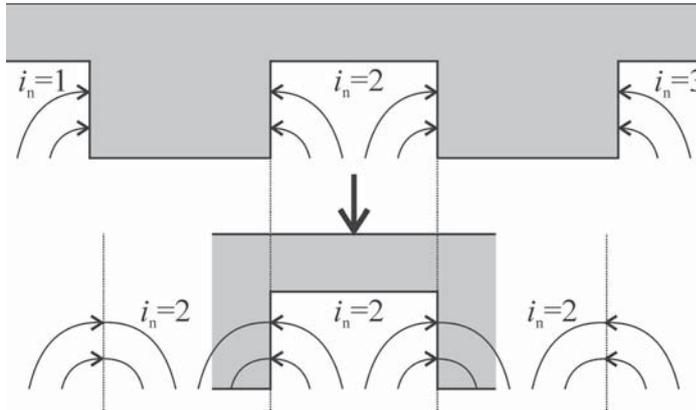


Abbildung 2.2: Spiegelung des Feldverlaufs an den Nutkanten zur Erfüllung der Randbedingungen: Ausgangsgeometrie mit Feld (oben) und gespiegelter Feldverlauf (unten)

des luftseitigen Feldverlaufs mit $B_{yL}(x)$ bezeichnet, so gilt für den Flussdichteverlauf auf dem Übergang zwischen Nut- und Luftbereich formal

$$B_{yI_n}(x, y_I = -h_n/2) = \begin{cases} B_{yL}(x) & \text{für } x = x_{s,i_n} \dots x_{e,i_n} \\ B_{yL}(2x_{e,i_n} - x) & \text{für } x = x_{e,i_n} \dots 2x_{e,i_n} - x_{s,i_n}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Es wird angenommen, dass der Verlauf B_{yL} bekannt ist und als Fourierreihe

$$B_{yL} = \sum_{\nu} \sum_n \hat{B}_{yL,(\nu,n)} \exp(j(\nu\omega t + na_x x)) \quad (2.14)$$

mit der Wellenzahl

$$a_x = \pi / (p\tau_p) \quad (2.15)$$

vorliegt. Der Fourierkoeffizient für den nutseitigen Feldverlauf der Nut i_n auf dem Übergang zwischen Nut- und Luftbereich berechnet sich mit

$$\hat{B}_{yI_n, (v,k)} \Big|_{y_1 = -h_n/2} = \frac{1}{T} \frac{1}{2b_n} \int_{t=0}^T \int_{x=x_{s,i_n}}^{x_{e,i_n}} B_{yL} \exp(-j(\nu\omega t - ka_{xn}x)) dx dt. \quad (2.16)$$

Durch Einsetzen von (2.14) erhält man

$$\hat{B}_{yI_n, (v,k)} \Big|_{y_1 = -h_n/2} = \sum_n g_{ni_n}(k, n) \hat{B}_{yL, (v,n)}. \quad (2.17)$$

Die zur Abkürzung eingeführte Funktion berechnet sich mit

$$g_{ni_n}(k, n) = \frac{1}{b_n} \left[\frac{\exp(j(na_x - ka_{xn})x_{e,i_n}) - \exp(j(na_x - ka_{xn})x_{s,i_n})}{j(na_x - ka_{xn})} + \exp(jna_x 2x_{e,i_n}) \right] \cdot \left[\frac{\exp(-j(na_x + ka_{xn})(2x_{e,i_n} - x_{s,i_n})) - \exp(-j(na_x + ka_{xn})x_{e,i_n})}{j(na_x + ka_{xn})} \right]. \quad (2.18)$$

Sie kann in einen von i_n abhängigen und einen hiervon unabhängigen Teil aufgespalten werden:

$$g_{ni_n}(k, n) = \exp(j(na_x - ka_{xn})x_{s,i_n}) g_{n0}(k, n) \quad (2.19)$$

mit

$$g_{n0}(k, n) = \begin{cases} 1 + \frac{\exp(j(na_x - ka_{xn})b_n) \exp(-j(na_x + ka_{xn})2b_n) - 1}{b_n j(na_x + ka_{xn})} & \text{für } na_x - ka_{xn} = 0 \\ \frac{1}{b_n} \frac{\exp(j(na_x - ka_{xn})b_n) - 1}{j(na_x - ka_{xn})} + 2 \exp(j(na_x - ka_{xn})b_n) & \text{für } na_x + ka_{xn} = 0 \\ \frac{1}{b_n} \left\{ \frac{\exp(j(na_x - ka_{xn})b_n) - 1}{j(na_x - ka_{xn})} + \frac{\exp(j(na_x - ka_{xn})b_n) \cdot \exp(-j(na_x + ka_{xn})2b_n) - 1}{j(na_x + ka_{xn})} \right\} & \text{für sonstige.} \end{cases} \quad (2.20)$$

Mit Hilfe der Randbedingung an der Nutoberkante (keine Tangentialkomponente auf Luftseite)

$$\hat{B}_{xI_n, (v,k)} (y_1 = h_n/2) = 0 \quad (2.21)$$

und den Ausdrücken für die Flussdichteamplituden (2.11) und (2.12) sowie mit (2.17) und (2.19) erhält man für die x -Komponente der Flussdichte auf dem Übergang zwischen Nut- und Luftbereich

$$\hat{B}_{xI_n, (v,k)} \Big|_{y_1 = -h_n/2} = \frac{2\gamma_{1,k}}{jka_{xn} (\tanh(\gamma_{1,k}h_n/2) + \coth(\gamma_{1,k}h_n/2))} \sum_n \exp(j(na_x - ka_{xn})x_{s,i_n}) g_{n0}(k, n) \hat{B}_{yL, (v,n)}. \quad (2.22)$$

Damit ermittelt man für die Konstanten der Nut i_n

$$A_{I_{i_n},(v,k)} = \frac{1}{jka_{x_n} (\tanh(\gamma_{1,k}h_n/2) + \coth(\gamma_{1,k}h_n/2))} \sum_n g_{ni_n}(k, n) \hat{B}_{yL,(v,n)}, \quad (2.23)$$

$$B_{I_{i_n},(v,k)} = -\frac{\coth(\gamma_{1,k}h_n/2)}{jka_{x_n} (\tanh(\gamma_{1,k}h_n/2) + \coth(\gamma_{1,k}h_n/2))} \sum_n g_{ni_n}(k, n) \hat{B}_{yL,(v,n)}. \quad (2.24)$$

Die x -Komponente der gesamten luftspaltseitigen Flussdichte kann als Fourierreihe

$$B_{xL} = \sum_v \sum_m \hat{B}_{xL,(v,m)} \exp(j(v\omega t + ma_x x)) \quad (2.25)$$

dargestellt werden. Im Bereich der Nutöffnungen der Nut i_n $x = x_{s,i_n} \dots x_{e,i_n}$ stimmt die luftspaltseitige Flussdichte mit der Flussdichte der Nutöffnungen überein. In allen anderen Bereichen verschwindet sie. Für den Fourierkoeffizienten gilt somit unter Verwendung von (2.22)

$$\begin{aligned} \hat{B}_{xL,(v,m)} &= \frac{1}{T} \frac{1}{2p\tau_p} \int_{t=0}^T \sum_{i_n=1}^{n_n} \int_{x=x_{s,i_n}}^{x_{e,i_n}} B_{xI_{i_n}}|_{y_1=-h_n/2} \exp(-j(v\omega t + ma_x)x) dx dt \\ &= \sum_{i_n=1}^{n_n} \sum_k f_{ni_n}(m, k) \hat{B}_{xI_{i_n},(v,k)}|_{y_1=-h_n/2}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Die Funktion $f_{ni_n}(m, k)$ wird wie oben in einen von i_n abhängigen und einen hiervon unabhängigen Teil aufgespalten:

$$f_{ni_n}(m, k) = \exp(j(ka_{x_n} - ma_x)x_{s,i_n}) f_{n0}(m, k). \quad (2.27)$$

Dabei gilt

$$f_{n0}(m, k) = \begin{cases} \frac{b_n}{2p\tau_p} & \text{für } ka_{x_n} - ma_x = 0 \\ \frac{1}{2p\tau_p} \frac{\exp(j(ka_{x_n} - ma_x)b_n) - 1}{j(ka_{x_n} - ma_x)} & \text{für sonstige.} \end{cases} \quad (2.28)$$

Einsetzen von (2.22) in (2.26) führt auf

$$\hat{B}_{xL,(v,m)} = \sum_k \sum_n \left\{ \frac{\left(\sum_{i_n=1}^{n_n} \exp(j(n-m)a_x x_{s,i_n}) \right) f_{n0}(m, k) g_{n0}(k, n)}{jka_{x_n} (\tanh(\gamma_{1,k}h_n/2) + \coth(\gamma_{1,k}h_n/2))} \right\} \hat{B}_{yL,(v,k)}. \quad (2.29)$$

Die Summe über die Nuten kann separat ausgewertet werden. Dabei erhält man mit Hilfe der endlichen geometrischen Reihe und (2.2)

$$\begin{aligned} \sum_{i_n=1}^{n_n} \exp(j(n-m)a_x x_{s,i_n}) &= \exp\left(-j(n-m)a_x \frac{\tau_n + b_n}{2}\right) \sum_{i_n=1}^{n_n} \exp(j(n-m)a_x i_n \tau_n) \\ &= \begin{cases} n_n \exp\left(-j(n-m)a_x \frac{\tau_n + b_n}{2}\right) & \text{für } n-m = 0, n_n, 2n_n, \dots \\ 0 & \text{für sonstige.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Definiert man

$$s(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n - m = 0, n_n, 2n_n, \dots \\ 0 & \text{für sonstige} \end{cases} \quad (2.31)$$

so ergibt sich mit Hilfe von (2.30)

$$\hat{B}_{xL,(v,m)} = \sum_k \sum_n \left\{ \frac{s(m, n) f_{n0}(m, k) g_{n0}(k, n) \exp\left(-j(n-m)a_x \frac{\tau_n + b_n}{2}\right)}{\underbrace{jka_{xn} (\tanh(\gamma_{1,k} h_n / 2) + \coth(\gamma_{1,k} h_n / 2))}_{z_{xy}(m,k)}} \right\} \hat{B}_{yL,(v,k)}. \quad (2.32)$$

Wenn Nutungseffekte in einer analytischen Rechnung berücksichtigt werden sollen, kann diese Gleichung als Randbedingung verwendet werden. Mit Hilfe der ermittelten Konstanten (2.23), (2.24) kann darüber hinaus der Feldverlauf innerhalb der Nut i_n angegeben werden.

2.2 Beschreibung der Nutung durch Kantenstromdichten

In diesem Abschnitt wird die Nutung durch die Einführung einer Kantenstromdichte auf den Nutkanten berücksichtigt. Der Vorteil gegenüber dem Verfahren aus dem vorhergehenden Abschnitt besteht darin, dass der Feldverlauf nicht nur innerhalb der Nuten sondern auch im angrenzenden Eisen berechnet wird. Der Nutbereich besteht aus den Nuten (Material: Vakuum) sowie dem umgebenden Eisen ($\mu_{r,Fe}$). Der Übergang von Luft nach Eisen wird durch eine virtuelle Kantenstromdichte am Übergang repräsentiert. Dabei ist es problemlos möglich die endliche relative Permeabilität des Eisens im Nutbereich $\mu_{r,Fe}$ zu berücksichtigen. Die Idee, den Übergang von Luft nach Eisen durch eine äquivalente Stromdichte in der Rechnung abzubilden, wurde bereits in [17] bei der Verwendung des Summationsverfahrens aufgegriffen. Mit Hilfe der ermittelten Kantenstromdichte wäre beispielsweise auch die Berechnung von Kräften auf die entsprechenden Eisenkanten möglich [18] (dort in Verbindung mit FEM).

Da die Kantenstromdichten an den Übergängen von Luft nach Eisen als anregende Stromdichten in die Differentialgleichung eingebaut werden, ist der Einsatz eines Skalarpotentials nicht möglich. Daher wird zur Lösung des Feldproblems das Vektorpotential verwendet. Durch den Einbau der Kantenstromdichten in die Differentialgleichung ergibt sich ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das auf ein Eigenvektor-Eigenwert-Problem zurückgeführt und gelöst wird.

2.2.1 Ermittlung der Kantenstromdichte beim Übergang von Luft nach Eisen

In diesem Abschnitt wird der Übergang zwischen zwei Materialien verschiedener relativer Permeabilitäten durch eine virtuelle Stromdichte beschrieben. Dazu wird exemplarisch der in Abbildung 2.3 dargestellte Übergang betrachtet. Material 1 verfügt über die relative Permeabilität $\mu_{r,1}$.

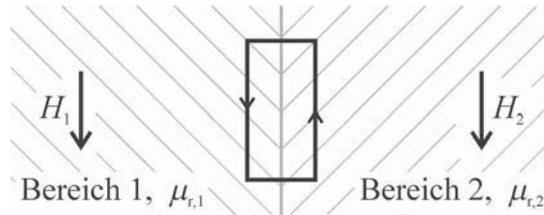


Abbildung 2.3: Übergang zwischen zwei Bereichen verschiedener Permeabilität

Material 2 hat entsprechend die relative Permeabilität $\mu_{r,2}$, wobei die Grenzschicht frei von Stromdichten ist. Die Anwendung des Durchflutungsgesetzes in integraler Formulierung

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint_A \vec{j} d\vec{A} \quad (2.33)$$

auf einen infinitesimalen Magnetisierungsumlauf um die Grenzschicht zwischen beiden Materialien führt auf

$$H_1 - H_2 = 0, \quad (2.34)$$

was der bekannten Stetigkeitsbedingung für die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke entspricht. Wird die Feldstärke in (2.34) durch die magnetische Flussdichte ersetzt, erhält man

$$\frac{B_1}{\mu_{r,1}} - \frac{B_2}{\mu_{r,2}} = 0. \quad (2.35)$$

Zur Ableitung der Kantenstromdichte wird der sprungförmige Materialübergang durch eine endliche Schichtdicke ersetzt. Der Übergang von $\mu_{r,1}$ nach $\mu_{r,2}$ wird als stetig mit einem linearen Verlauf angesetzt. Die Flussdichte hat somit in der Grenzschicht ebenfalls einen linearen Verlauf. Beides ist in Abbildung 2.4 dargestellt. Für den Verlauf der relativen Permeabilität und der Flussdichte im Bereich $x = x_0 - dx/2 \dots x_0 + dx/2$ gilt

$$\mu_r(x) = \mu_{r,1} + \frac{\mu_{r,2} - \mu_{r,1}}{dx} (x - x_0 + dx/2), \quad (2.36)$$

$$B(x) = B_1 + \frac{B_2 - B_1}{dx} (x - x_0 + dx/2). \quad (2.37)$$

In der Mitte der Grenzschicht bei $x = x_0$ gilt somit

$$\begin{aligned} \bar{B} &= B(x_0) \\ &= \frac{B_1 + B_2}{2}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_r &= \mu_r(x_0) \\ &= \frac{\mu_{r,1} + \mu_{r,2}}{2}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

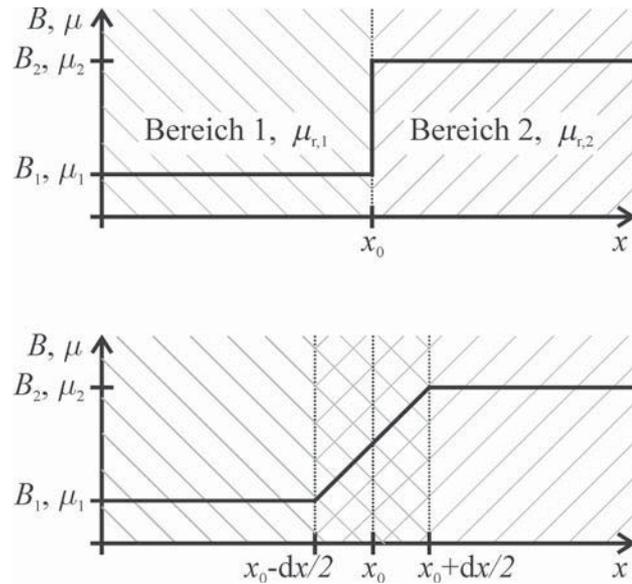


Abbildung 2.4: Verlauf von Flussdichte und Permeabilität am Übergang (oben: realer Verlauf, unten: idealisierter Verlauf)

Diese Werte bleiben auch im Fall des Grenzübergangs $dx \rightarrow 0$ erhalten. Nun werden die beiden Materialien durch ein einziges Material mit $\mu_r = 1$ und einen Strombelag J_q bei $x = x_0$ ersetzt. Die Anwendung des Durchflutungsgesetzes (2.33) liefert in diesem Fall

$$H_1 - H_2 = J_q. \quad (2.40)$$

Ausdrücken der Feldstärken durch die Flussdichten führt auf

$$B_1 - B_2 = \mu_0 J_q. \quad (2.41)$$

Zu beachten ist, dass sich durch die Änderung des Materials zwar die Feldstärken verändert haben, die Flussdichten jedoch weiterhin den tatsächlichen Flussdichten entsprechen. Die Kantenstromdichte J_q entspricht der bekannten Magnetisierung, die als gebundene Stromdichte aufgefasst werden kann [19].

Mit Hilfe von (2.35), (2.38) und (2.41) erhält man für die Grenzflächenstromdichte

$$J_q = \frac{\mu_{r,1} - \mu_{r,2}}{\mu_{r,1} + \mu_{r,2}} \frac{2}{\mu_0} \bar{B}. \quad (2.42)$$

Da der Mittelwert der rechts- und linksseitigen Flussdichte gerade dem Wert der Flussdichte in der Grenzschicht entspricht, kann die Grenzflächenstromdichte auch als

$$J_q = \frac{\mu_{r,1} - \mu_{r,2}}{\mu_{r,1} + \mu_{r,2}} \frac{2}{\mu_0} B(x_0) \quad (2.43)$$

geschrieben werden. Um eine formaleren und in der Praxis einfacher anwendbare Methode zu erhalten, wird das Durchflutungsgesetz in differentieller Formulierung betrachtet. Dabei wird nur die

Flussdichteänderung berücksichtigt, die durch die Änderung der Materialeigenschaft hervorgerufen wird. Das Durchflutungsgesetz lautet

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{J}. \quad (2.44)$$

Drückt man die Flussdichte durch die Feldstärke aus und teilt die Stromdichte in die Kantenstromdichte J_q und restliche Stromdichten J_0 auf, erhält man

$$\mu_0 (\vec{J}_0 + \vec{J}_q) = \operatorname{rot} (\mu \vec{H}) \quad (2.45)$$

$$= \underbrace{\mu_0 \operatorname{rot} (\vec{H})}_{\hat{=} \mu_0 \vec{J}_0} + \underbrace{\operatorname{grad} (\mu) \times \vec{H}}_{\hat{=} \mu_0 \vec{J}_k}. \quad (2.46)$$

Der Term für die Kantenstromdichte wird einzeln betrachtet. Die magnetische Feldstärke wird durch die Flussdichte ersetzt und die absoluten Permeabilitäten werden durch die relativen Permeabilitäten und die Vakuumpermeabilität ausgedrückt:

$$\mu_0 \vec{J}_q = \operatorname{grad} (\mu_r) \times \frac{\vec{B}}{\mu_r}. \quad (2.47)$$

Bei \vec{J}_q handelt es sich um den Vektor der Stromdichte, der im Vakuum den gleichen Feldwirbel verursacht wie die Materialänderung. Diese Stromdichte kann später an Stelle der Materialänderung in die Differentialgleichung eingebaut werden. Im vorliegenden Fall ergeben sich Kantenstromdichten für die Nut i_n jeweils an den Übergängen von Eisen nach Luft bei $x = x_{s,i_n}$ und am Übergang von Luft nach Eisen bei $x = x_{e,i_n}$. Führt man die Ableitung in (2.47) aus, erhält man

$$J_{qz} = \sum_{i_n=1}^{n_n} (\delta(x - x_{s,i_n}) - \delta(x - x_{e,i_n})) \frac{\Delta \mu_r}{\bar{\mu}_r} B_y. \quad (2.48)$$

Da nur Änderungen längs der x -Achse berücksichtigt werden müssen und es sich um ein zweidimensionales Problem in der xy -Ebene handelt, existiert nur eine z -Komponente der Kantenstromdichte. Bei δ handelt es sich um die Deltadistribution und $\Delta \mu_r$ ist die Änderung zwischen rechts- und linksseitigem Grenzwert der relativen Permeabilität an der Stelle $x = x_{s,i_n}$ oder $x = x_{e,i_n}$. Der Mittelwert des rechts- und linksseitigen Grenzwertes an eben dieser Stelle wird mit $\bar{\mu}_r$ bezeichnet. Da die Anordnung längs der x -Achse periodisch ist, ist die Entwicklung der Feldgrößen in Fourierreihen möglich. Für die y -Komponente der Flussdichte in Bereich I gilt somit

$$B_{yI} = \sum_v \sum_k \hat{B}_{yI,(v,k)} \exp(j(\nu \omega t + k a_x x)). \quad (2.49)$$

Der örtliche Verlauf der Kantenstromdichte kann ebenfalls als Fourierreihe dargestellt werden:

$$J_{qz} = \sum_v \sum_k \hat{J}_{qz,(v,k)} \exp(j(\nu \omega t + k a_x x)). \quad (2.50)$$

Der Fourierkoeffizient ergibt sich mit Hilfe von (2.48), (2.49) zu

$$\begin{aligned}
 \hat{J}_{qz,(v,n)} &= \frac{1}{T} \frac{1}{2p\tau_p} \int_{t=0}^T \int_{x=0}^{2p\tau_p} J_{qz} \exp(-j(v\omega t + na_x x)) dx dt \\
 &= \frac{\Delta\mu_r}{\bar{\mu}_r} \sum_{i_n=1}^{n_n} \sum_k (\exp(j(k-n)a_x x_{s,i_n}) - \exp(j(k-n)a_x x_{e,i_n})) \hat{B}_{yI,(v,k)} \\
 &= \frac{n_n \Delta\mu_r}{\bar{\mu}_r} \sum_k \left\{ \begin{aligned} &s(k-n) \exp(-j(k-n)0,5a_x \tau_n) \\ &\left(\exp\left(-j(k-n)a_x \frac{b_n}{2}\right) - \exp\left(j(k-n)a_x \frac{b_n}{2}\right) \right) \hat{B}_{yI,(v,k)} \end{aligned} \right\}. \quad (2.51)
 \end{aligned}$$

Für die letzte Umformung wurden (2.30), (2.31) verwendet.

2.2.2 Lösung der Felddifferentialgleichung

Da bedingt durch Einführung der nutäquivalenten Kantenstromdichten eine Stromdichte im Berechnungsgebiet vorliegt, ist bei der Bestimmung des Vektorpotentials die Poissongleichung zu lösen:

$$\Delta V_{zI} = -\mu J_{zI}. \quad (2.52)$$

Mit dem Ansatz

$$V_{zI} = \sum_v \sum_n \hat{V}_{zI,(v,n)} \exp(j(v\omega t + na_x x)) \quad (2.53)$$

sowie der Stromdichte nach (2.50) ergibt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Amplituden des Vektorpotentials

$$-(na_x)^2 \hat{V}_{zI,(v,n)} + \frac{\partial^2 \hat{V}_{zI,(v,n)}}{\partial y^2} = -\mu_0 \hat{J}_{qz,(v,n)}. \quad (2.54)$$

Mit der Flussdichte nach $\vec{B} = \text{rot } \vec{V}$, (2.51) und (2.53) erhält man für die Amplituden des Vektorpotentials

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \hat{V}_{zI,(v,n)}}{\partial y^2} &= (na_x)^2 \hat{V}_{zI,(v,n)} - \\
 &j\mu_0 \frac{n_n \Delta\mu_r}{\bar{\mu}_r} \sum_k \left\{ \begin{aligned} &s(k-n) \exp(-j(k-n)0,5a_x \tau_n) \\ &\left(\exp\left(-j(k-n)a_x \frac{b_n}{2}\right) - \exp\left(j(k-n)a_x \frac{b_n}{2}\right) \right) \end{aligned} \right\} a_x k \hat{V}_{zI,(v,k)}. \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich um eine Zeile eines Differentialgleichungssystems für die Amplituden des Vektorpotentials. In Matrixschreibweise gilt

$$\frac{\partial^2 \hat{V}_{zI}}{\partial y^2} = \underline{\underline{A}}_{\text{sysI}} \hat{V}_{zI}. \quad (2.56)$$

Darin ist $\underline{A}_{\text{sysI}}$ die Systemmatrix mit Einträgen nach (2.55). Die Lösung ist durch eine Linearkombination von Hyperbelfunktionen mit den Konstanten $\underline{A}_I, \underline{B}_I$ gegeben:

$$\hat{V}_{zI} = \underline{C}_{\text{I}} \left(\text{SH} \left(\underline{\Gamma}_{\text{I}} y, \underline{\Gamma}_{\text{I}} h_n / 2 \right) \underline{A}_I + \text{CH} \left(\underline{\Gamma}_{\text{I}} y, \underline{\Gamma}_{\text{I}} h_n / 2 \right) \underline{B}_I \right). \quad (2.57)$$

Darin sind \underline{C}_{I} die Matrix der Eigenvektoren der Systemmatrix und

$$\underline{\Gamma}_{\text{I}} = \text{diag} (\gamma_{I,-n_{\text{max}}}, \dots, \gamma_{I,n_{\text{max}}}) \quad (2.58)$$

die Diagonalmatrix der Quadratwurzeln der zugehörigen Eigenwerte $\gamma_{I,n}$. Die Anwendung der Hyperbelfunktionen ist hier und im Folgenden als

$$\text{SH} \left(\underline{\Gamma}_{\text{I}} y, \underline{\Gamma}_{\text{I}} h_n / 2 \right) = \sinh \left(\underline{\Gamma}_{\text{I}} y \right) \cosh \left(\underline{\Gamma}_{\text{I}} h_n / 2 \right)^{-1}, \quad (2.59)$$

$$\text{CH} \left(\underline{\Gamma}_{\text{I}} y, \underline{\Gamma}_{\text{I}} h_n / 2 \right) = \cosh \left(\underline{\Gamma}_{\text{I}} y \right) \cosh \left(\underline{\Gamma}_{\text{I}} h_n / 2 \right)^{-1} \quad (2.60)$$

zu verstehen. Da die Funktionen stets auf Diagonalmatrizen angewendet werden, entspricht dies der Anwendung auf die Hauptdiagonalelemente. Ist man am Feldverlauf in den Nuten nicht interessiert sondern nur an der Auswirkung der Nutung auf den Verlauf des Luftspaltfeldes, so ist auch in diesem Fall die Ableitung einer Randbedingung für den Übergang zwischen Luft- und Nutbereich möglich. Mit der Randbedingung an der Nutoberkante

$$B_{xI} (y_I = h_n / 2) = 0 \quad (2.61)$$

sowie mit (2.53), (2.57) und $\vec{B} = \text{rot } \vec{V}$ ergibt sich

$$\hat{B}_{yI} (y_I = -h_n / 2) = -j \frac{a_x}{2} \underline{K} \underline{C}_{\text{I}} \left(\tanh \left(\underline{\Gamma}_{\text{I}} h_n / 2 \right) - \coth \left(\underline{\Gamma}_{\text{I}} h_n / 2 \right) \right) \underline{\Gamma}_{\text{I}}^{-1} \underline{C}_{\text{I}}^{-1} \hat{B}_{xI} (y = -h_n / 2). \quad (2.62)$$

Die x -Komponente der Flussdichte liegt dabei auf der Nutseite. Für die Diagonalmatrix der Ordnungszahlen gilt

$$\underline{K} = \text{diag} (-k_{\text{max}}, \dots, k_{\text{max}}). \quad (2.63)$$

Bei der Darstellung ist zu beachten, dass die Hyperbelfunktionen nur auf die Hauptdiagonale der Diagonalmatrizen angewendet werden, so dass sich wieder eine Diagonalmatrix ergibt.

Wird die Luftseite der Flussdichte betrachtet, muss der Permeabilitätssprung berücksichtigt werden:

$$0 = \mu_{r,n} B_{xL} - B_{xI} (y = -h_n / 2). \quad (2.64)$$

Dabei ist $\mu_{r,n}$ der Verlauf der relativen Permeabilität, der in Abbildung 2.5 gezeigt ist. Dieser kann in eine Fourierreihe

$$\mu_{r,n} = \sum_k \hat{\mu}_{r,n,k} \exp(jka_x x) \quad (2.65)$$

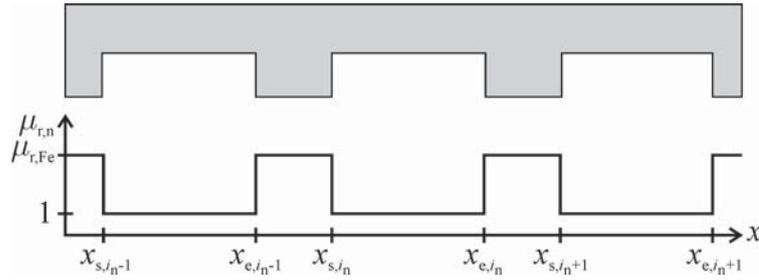


Abbildung 2.5: Permeabilitätsverlauf auf dem Übergang zwischen Luft- und Nutbereich

entwickelt werden. Der Fourierkoeffizient ergibt sich mit Hilfe von (2.2), (2.3) zu

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{r,n,k} &= \sum_{i_n=1}^{n_n} \frac{1}{2p\tau_p} \left\{ \int_{(i_n-1)\tau_n}^{x_{s,i_n}} \mu_{r,Fe} \exp(jka_x x) dx + \int_{x_{s,i_n}}^{x_{e,i_n}} \exp(jka_x x) dx + \right. \\ &\quad \left. \int_{x_{e,i_n}}^{i_n\tau_n} \mu_{r,Fe} \exp(jka_x x) dx \right\} \\ &= \frac{1}{ka_x p \tau_p} \left\{ \left(\sum_{i_n=1}^{n_n} \exp(jka_x i_n \tau_n) \right) \exp(-jka_x \tau_n / 2) \right. \\ &\quad \left. [\mu_{r,Fe} (\sin(ka_x \tau_n / 2) - \sin(ka_x b_n / 2)) + \sin(ka_x b_n / 2)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Die Summe über die Nuten kann analog zu (2.30) als geschlossener Ausdruck dargestellt werden. Abhängig von der Ordnungszahl ergibt sich

$$\hat{\mu}_{r,n,k} = \begin{cases} \frac{n_n}{2p\tau_p} (\mu_{r,Fe} (\tau_n - b_n) + b_n) & \text{für } k = 0 \\ \frac{n_n}{p\tau_p n a_x} \exp(-jka_x \tau_n / 2) \left[\mu_{r,Fe} \left(\sin\left(ka_x \frac{\tau_n}{2}\right) - \sin\left(ka_x \frac{b_n}{2}\right) \right) + \right. \\ \quad \left. \sin(ka_x b_n / 2) \right] & \text{für } k = n_n, 2n_n, \dots \\ 0 & \text{für sonstige.} \end{cases} \quad (2.67)$$

Für die Randbedingung (2.64) ergibt sich durch Einsetzen der Fourierreihen

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\nu} \sum_k \sum_n \hat{\mu}_{r,n,k} \hat{B}_{xL,(v,n)} \exp(j(\nu\omega t + (k+n)a_x x)) - \\ &\quad \sum_{\nu} \sum_n \hat{B}_{xI,(v,n)} (y_I = -h_n/2) \exp(j(\nu\omega t + na_x x)). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Durch Substitution des Summenindex $n \rightarrow n - k$ erhält man

$$\hat{B}_{xI,(v,n)} (y_I = -h_n/2) = \sum_k \hat{\mu}_{r,n,k} \hat{B}_{xL,(v,n-k)}. \quad (2.69)$$

Die $\hat{\mu}_{r,n,k}$ werden in der Matrix $\underline{\underline{\mu}}_{r,n}$ zusammengefasst, so dass die nutseitigen Flussdichten in (2.62) durch die luftspaltseitigen Flussdichten ersetzt werden können. Damit ergibt sich unter Berücksichtigung der Stetigkeit der Flussdichtenormalkomponente die gewünschte Randbedingung: