1 Einleitung

1.1 Das Taylor-Couette-System als vereinfachtes Gleitlagermodell

Die Entwicklung des numerischen 3D-Lagermodells erfolgt in einem ersten Schritt anhand der Geometrie eines einfachen Zylinderspalts. Dieses Zylinderspaltsystem wird auch als Taylor-Couette-System bezeichnet 1.1.2 und steht seit mehr als 100 Jahren im Fokus intensiver Forschung 1.2. Im Anschluss werden lagertypische Spaltweiten, geometrische Erweiterungen und Randbedingungen hinzugefügt. In diesem Kapitel soll zunächst der Zusammenhang zwischen diesem sehr bekannten physikalischen Testsystem und dem des Gleitlagers vorgestellt werden.

1.1.1 Das Gleitlager

Rotierende oder bewegliche Bauteile müssen geführt oder gelagert werden. Grundsätzlich unterteilt man Lager nach dem Funktionsprinzip in zwei Gruppen, in Wälz- und Gleitlager. Wie aus den Namen ableitbar, rollen oder wälzen sich im Falle des Wälzlagers die Oberfläche des rotierenden Bauteils an der Führungsoberfläche (Lagerschale) entlang. Dementsprechend gleiten die Oberflächen beim Gleitlager relativ zueinander. Im Idealfall sind hier die Gleitflächen durch eine im Schmierfilm hydrostatisch oder hydrodynamisch (1.1) erzeugte Druckkraft getrennt.

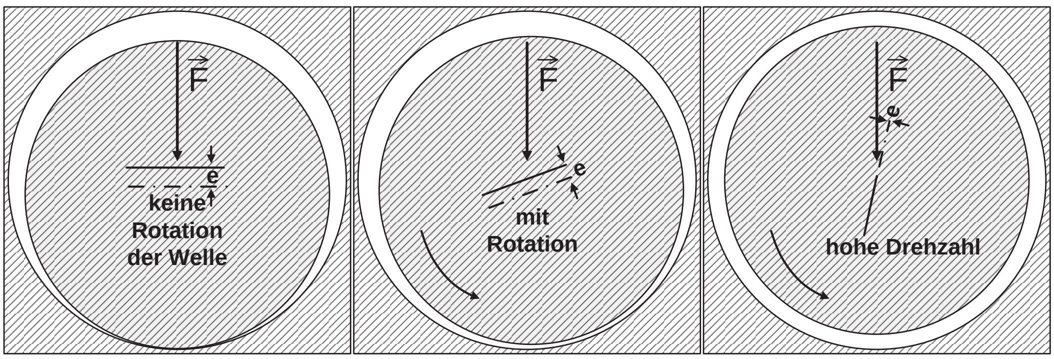

Abbildung 1.1: Durch Erhöhung der Drehzahl entsteht in der Nähe des engsten Spalts eine erhöhte Druckkraft, die die Welle in Richtung des konzentrischen Ursprunges drückt.

Weiterführend werden Lager nach der Belastungsrichtung in Axial- und Radiallager unterteilt (1.2).

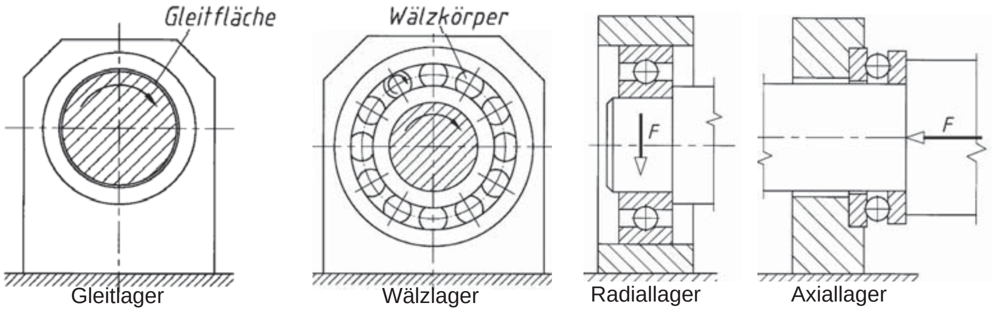

Abbildung 1.2: Einteilung der Lager nach Funktionsprinzip und Belastungsrichtung [Muhs u. a. 2007]

Die Wahl des Lagers hängt von der Anwendung ab. Bei hohen Drehzahlen und stetigem Betrieb wird häufig ein Gleitlager verwendet. Muss das Lager viele unstetige Betriebszyklen führen wird eher ein Wälzlager verwendet (1.3).

Wälzlager (WL)	**Gleitlager (GL)**
Ausbildung eines hydrodynamischen Schmierfilms	
ungünstig (weite Schmiegung, hohe Pressung)	günstig (enge Schmiegung, niedrige Pressung)
Lebensdauer/Schadensgrenze	
Grübchenbildung (Oberflächenermüdung), Verschleiß	An- und Auslauf-, evtl. Betriebsverschleiß [2)]
– weitgehend genormt, austauschbar [1)] – geringer Wartungsaufwand (z.T. wartungsfrei) – geringe Anlaufreibung ($\mu_{\mathrm{wL}} \approx$ 0,002 … 0,01) – geringe Wärmeentwicklung – kein Ruckgleiten (stick-slip) – i. allg. kein Einlaufen nötig – geringer Schmierstoffverbrauch – geringe Lagerbreite – Beratung durch Spezialfirmen (Software, Verantwortung) [1)] – in der Regel kein Einfluß des Wellenwerkstoffs	– unempfindlich gegen Stöße und Erschütterungen – geräusch- und schwingungsdämfend (Schmierfilm) – geteilte Lager möglich (z. B. für Kurbelwelle) [3)] – besonders kostengünstig bei großen Durchmessern (z. B. Turbinenwellen) und sehr kleinen Durchmessern (z. B. Kunststofflager für Haushaltsmaschinen) – kleiner Außendurchmesser – sehr hohe Drehzahlen möglich (z. B. Turbinen) – bei vollem Schmierfilm geringe Reibung, lange Lebensdauer [4)] – hohe Steifigkeit – Gefahr des Ruckgleitens (stick-slip)

[1)] z. T. auch für Gleitlager erreichbar,
[2)] nicht bei hydro- und aerostatischen Lagern,
[3)] als Sonderausführung auch bei Wälzlagern möglich,
[4)] insbesondere bei hydro- und aerostatischen Lagern erreichbar.

Abbildung 1.3: Vor- und Nachteile von Gleit- und Wälzlagern [Muhs u. a. 2007]

Das numerische 3D-Lagermodell, das in dieser und weiterführender Arbeit erstellt wird, orientiert sich an der Geometrie und den Randbedingungen eines Motorenhauptlagers aus der Dissertation von M. Wollfarth an der Universität Karlsruhe [Wollfarth 1995]. Hier konnten Kavitationsschäden experimentell reproduzierbar erzeugt werden. Hauptlager führen die Kurbelwelle im Motor (1.4).

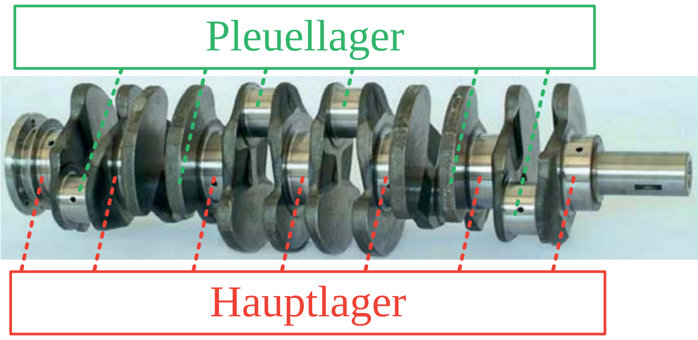

Abbildung 1.4: Haupt- und Pleuellager. Zu sehen ist hier nur die Welle ohne Lagerschalen. Bildquelle: [Formex]

Im Gegensatz zu den Pleuellagern, besitzen die Hauptlager die gleiche Rotationsachse. Die Rotationsachse der Pleuellager bewegt sich in etwa auf einer Kreisbahn um die Hauptlagerrotationsachse.

1.1.2 Das Taylor-Couette-System

Betrachtet man das Gleitlager abstrahiert und ohne geometrische Details wie Ölversorgungsbohrungen oder Nuten, erhält man einen Zylinderspalt. Zur Veranschaulichung soll erneut Abbildung 1.5 dienen.

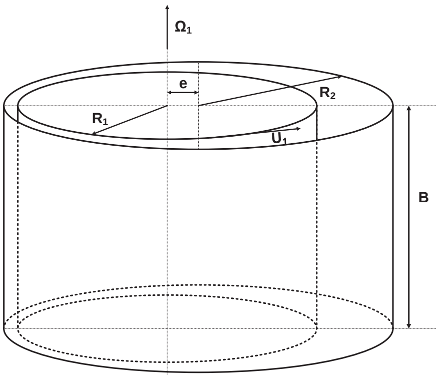

Abbildung 1.5: Geometrie eines exzentrischen Zylinderspalts mit rotierendem Innenzylinder und festem Außenzylinder.

Dieses Zylinderspaltsystem wurde letztendlich benannt nach Maurice Marie Alfred Couette und Geoffrey Ingram Taylor. Letztgenanntem gelang es die zuerst einsetzende hydrodynamische Instabilität 1.9, für die er ebenfalls namens gebend war (Taylor-Wirbelströmung, engl.:Taylor vortex flow), mathematisch zu formulieren [Taylor 1923], nachdem sie von Stokes [Stokes 1845] vorhergesagt und unter anderem von Mallock [Mallock 1888] beobachtet wurde. Couette war wie Mallock ein herausragender Konstrukteur von präzisen Messaufbauten. Da Couette einer der meistzitierten Naturwissenschaftler dieser Zeit war, setzte sich diese Beschreibung durch. Obgleich die Reihenfolge der Namen regional permutiert. In Frankreich spricht man auch vom Couette-Taylor-System.

1.2 Stand der Forschung

1.2.1 Konzentrisches Taylor-Couette-System

Wie in Kapitel 1.1.2 angedeutet, liegt die Geburtsstunde des wissenschaftlichen Interesses an der Strömung im Zylinderspalt weit mehr als 100 Jahre zurück und ist dem späten 19. Jahrhundert zuzuordnen. Allerdings schrieb George Gabriel Stokes bereits 1845: „... if the inner [cylinder, d. Verf.] were made to revolve too fast, the fluid near it would have a tendency to fly outwards in consequence of the centrifugal force, and eddies would be produced.“ [Stokes 1845]. Er sagte also bei entsprechend hoher Innenzylinderrotation das Auftreten einer Wirbelströmung vorher ohne sie beobachtet zu haben.

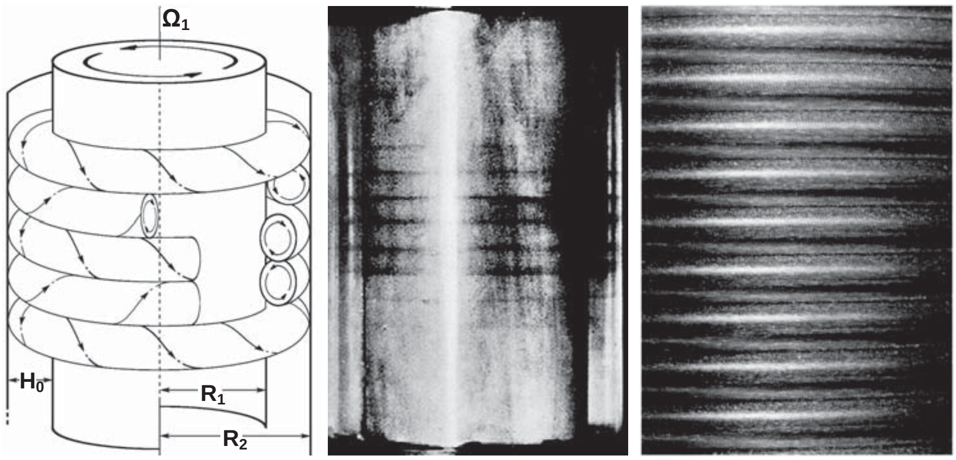

Abbildung 1.6: Die von Stokes vorhergesagte Wirbelströmung. Hierfür setzte sich später der Begriff Taylor-Wirbelströmung. Links: Strömungsskizze [Minbiole und Lueptow]. Mitte: Aufnahme von Taylor [Taylor 1923]. Rechts: Aufnahme von Tom Mullin [Mullin 1993].

Dieses Paper erscheint ebenfalls im Rahmen einer Literatursammlung der Universität Cambridge [Stokes u. a. 1880] 35 Jahre später und wird auch oft als Quelle des obigen Zitats genannt. Im Jahr 1881 stellt Max Margules die Idee einer Viskositätsmessung mit einem Zylinderspaltsystem vor [Margules 1881]. 1888 veröffentlichte der für diese Zeit herausragende Konstrukteur Henry Reginald Arnuplh Mallock eine Arbeit bezüglich seines Experimentes zur Viskositätsmessung [Mallock 1888]. Sein Experiment basierte auf einem sehr ausgefeilten Zylindersystem mit dem entweder Drehmoment am festen Innenzylinder oder am festen

Außenzylinder, bei jeweils rotierenden anderen Zylinder, gemessen wurde. Er stellte im Fall der Innenzylinderrotation ein nicht lineares Verhalten von Innenzylindergeschwindigkeit zum gemessenem Drehmoment am Außenzylinder fest und schloss daraus, dass diese Strömung immer instabil sei. Was so nicht ganz stimmte. Im Falle der Außenzylinderrotation stellte er hingegen eine stabile Strömung fest, die nur bei sehr hoher Außenrotation instabil wurde. Etwa zeitgleich und unabhängig von Mallock, führte sein französischer Kollege Maurice Marie Alfred Couette 1890 ebenfalls Viskositätsmessungen mit einem zylindrischem Viskosimeter durch. Hierbei handelte es sich um einen Zylinderspalt mit Außenrotation und fest stehendem Innenzylinder [Couette 1890]. Da es sich bei dieser Art der Zylinderspaltströmung um die stabile konzentrische laminare Grundströmung handelte und Couette einer der meistzitierten Strömungsmechaniker seiner Zeit war, setzte sich der Begriff der „Couette-Strömung“ durch [Donnelly 1991]. Erwähnt sei in diesem Zusammenhang auch die Bezeichnung der „ebenen Couette-Strömung“ für eine Scherströmung zwischen zwei relativ bewegten Platten. Russell James Donnelly erwähnt in einem sehr ausführlichem Artikel zur Historie der Taylor-Couette Strömung in Physics Today [Donnelly 1991], dass William Thomson, 1. Baron Kelvin von Mallock‘s Arbeiten sehr angetan war und seinerzeit über eine Stabilitätsanalyse zu diesem Thema nachdachte. In diesem Zusammenhang stand er in Briefkorrespondenz mit John William Strutt, 3. Baron Rayleigh, der im Jahr 1916, für die reibungsfreie Zylinderspaltströmung zeigen konnte, dass bei in radialer Richtung größer werdendem Drehimpuls eine stabile wirbelfreie Strömung vorliegt [Rayleigh 1916]. Sei $\Omega(r)$ die Winkelgeschwindigkeit an der Spaltposition $r \in [R_1; R_2]$ und $\tilde{\mu} = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ das Rotationsverhältnis, dann kann Rayleigh‘s Stabilitätskriterium für eine reibungsfreie Strömung folgendermaßen formuliert werden:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\Omega(r)\right) > 0 \tag{1.1}$$

oder

$$\Omega_1 {R_1}^2 < \Omega_2 {R_2}^2 \ , \tag{1.2}$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\eta^2 = \frac{{R_1}^2}{{R_2}^2} < \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \tilde{\mu} \ . \tag{1.3}$$

Wobei

$$\eta = \frac{R_1}{R_2} \tag{1.4}$$

das Radienverhältnis des Innenzylinders zum Außenzylinder beschreibt.

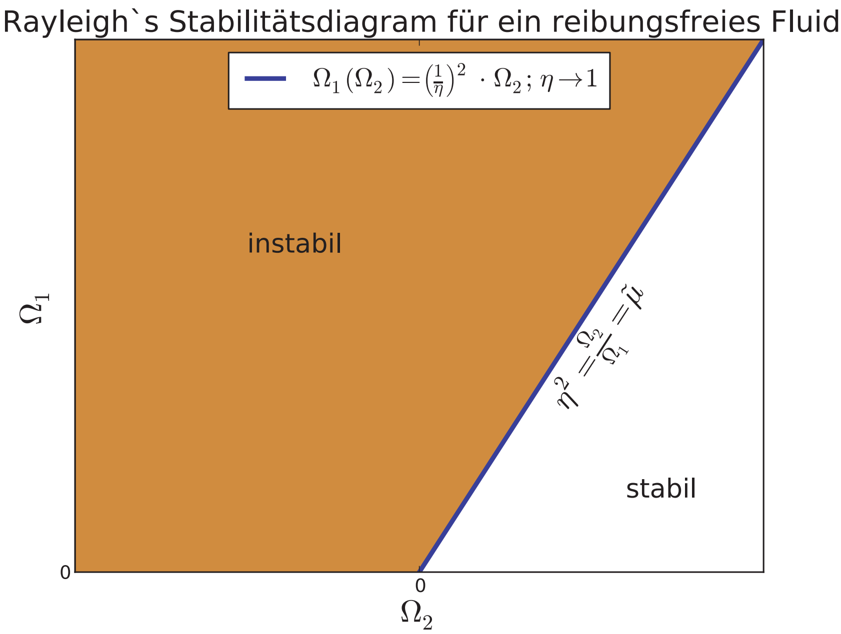

Abbildung 1.7: Rayleigh‘s Stabilitätskriterium für ein reibungsfreies Fluid im konzentrischen Zylinderspalt von 1916 [Rayleigh 1916]. Die blaue Linie kennzeichnet die Stabilitätsgrenze aus Gleichung (1.3).

Im Jahr 1923 gelingt Taylor mit seiner linearen Stabilitätsanalyse [Taylor 1923] der wichtigste Meilenstein dieser Epoche. Mit umfangreichen eigenen Messungen an drei verschiedenen Spaltweiten (R_1=3.00; 3.55; 3.80 cm bei R_2=4.035 cm) und außergewöhnlich hohem mathematischen Aufwand für eine Zeit ohne Computer, erstellt er drei Stabilitätsdiagramme $\frac{\Omega_1}{\nu}\left(\frac{\Omega_2}{\nu}\right)$ (Abbildung 1.8, 1.9 und 1.10) sowie eine allgemeine mathematische Formulierung (Gleichungen (1.6) und (1.7)), welche das Einsetzen der Instabilität (Abbildung 1.6) gegenüber der stabilen Couette Strömung beschreibt. Diese ist allerdings nur für enge Spalte gültig, bei denen eine Abhängigkeit von $\frac{R_2-R_1}{R_1}$ (Gleitlagerbereich: $\sim \mathcal{O}\,(10)^{-3}$) berücksichtigt, $\left(\frac{R_2-R_1}{R_1}\right)^2$ ($\sim \mathcal{O}\,(10)^{-6}$) aber vernachlässigt wird. Der Parameter

$$\Psi = \frac{R_2 - R_1}{R_1} \tag{1.5}$$

ist hierbei die normierte Spaltweite. Die Gültigkeit für kleine normierte Spaltweiten Ψ wird weiter unten in Abbildung 1.11 verdeutlicht.

Anhand der drei Messreihen validiert er seine mathematische Formulierung. Hierzu zwei originale Abbildungen aus seinem Paper.

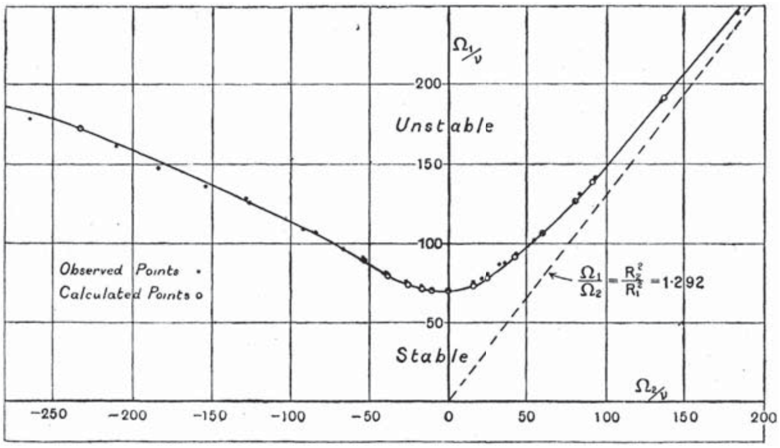

Abbildung 1.8: Taylor‘s rechnerische und experimentelle Ergebnisse für Ψ=0.06184 bei R_1=3.8 cm, R_2=4.035 cm [Taylor 1923]. Die gestrichelte Linie ist die Rayleigh-Grenze aus Gleichung (1.3) und Abbildung 1.7.

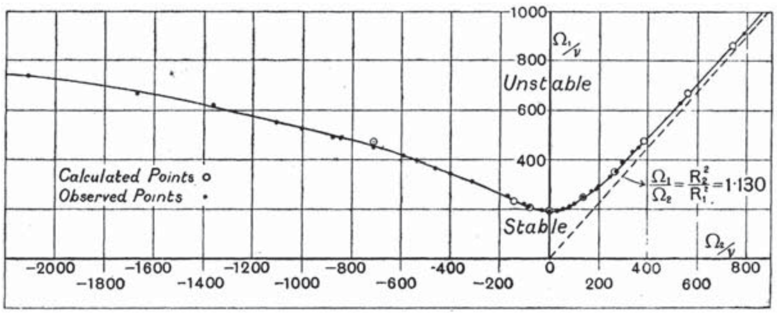

Abbildung 1.9: Taylor‘s rechnerische und experimentelle Ergebnisse für Ψ=0.13662 bei R_1=3.55 cm, R_2=4.035 cm [Taylor 1923] .

Gleichungen (1.6) und (1.7) beschreiben Taylor‘s Stabilitätskriterium. Obwohl es nur für $\tilde{\mu} \in [0;1]$ gelten dürfte, stellte er fest, daß diese Formulierung bis $\tilde{\mu} = -0.5$ in guter Näherung mit seinen Messergebnissen übereinstimmte.

$$P = \frac{\pi^4 \nu^2 \left(R_1 + R_2\right)}{2\Omega_1^2 R_1^2 \left(R_2 - R_1\right)^3 \left(1 - \frac{\tilde{\mu} {R_2}^2}{{R_1}^2}\right)\left(1 - \tilde{\mu}\right)} \tag{1.6}$$

$$P = 0.0571 \left(\frac{1+\tilde{\mu}}{1-\tilde{\mu}} - 0.652 \frac{\left(R_2 - R_1\right)}{R_1}\right) + 0.00056 \left(\frac{1+\tilde{\mu}}{1-\tilde{\mu}} - 0.652 \frac{\left(R_2 - R_1\right)}{R_1}\right)^{-1} \tag{1.7}$$

Die Vorgehensweise zur Erstellung eines Punktes des Diagramms wie in Abbildung 1.8 ist Folgende:

- Vorgabe der Spaltgeometrie R_1, R_2 und Wählen eines Rotationsverhältnisses $\tilde{\mu}$ mit $\tilde{\mu} \in [-0.5; 1]$

- Berechnung von P mittels Gleichung (1.7)
- Einsetzen des berechneten P in Gleichung (1.6) und Berechnen von $\frac{\Omega_1}{\nu}$
- Aus $\tilde{\mu}$ und $\frac{\Omega_1}{\nu}$ ergibt sich das entsprechende $\frac{\Omega_2}{\nu}$

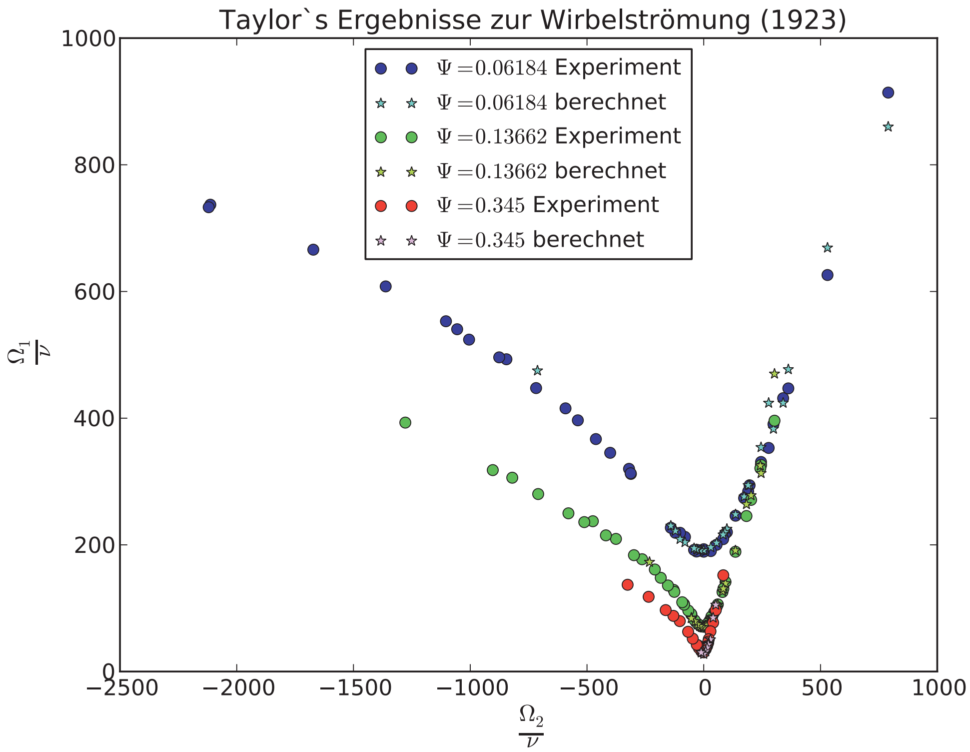

Abbildung 1.10: Taylor‘s rechnerische und experimentelle Ergebnisse zusammengefasst in einem Diagramm. Die abgebildeten berechneten Werte sind bis auf 2 Sonderrechnungen im Bereich $\tilde{\mu} \in [-0.5; 1]$.

Vergleicht man P (1.6) (1.7) mit der später definierten dimensionslosen Kennzahl Reynolds-Zahl (1.8) wird oder der Taylor zu Ehren benannten Kennzahl Taylor-Zahl (1.8),

$$Re = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}} = \frac{U \cdot L}{\nu} = \frac{\Omega_1 R_1 (R_2 - R_1)}{\nu} \tag{1.8}$$

wobei U = eine charakteristische Geschwindigkeit der Strömung und L = ein charakteristisches Längenmaß in der Strömung ist,

$$Ta = 2Re^2 \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} = 2Re^2 \frac{1 - \eta}{1 + \eta} = 2 \left(\frac{\Omega_1}{\nu} \right)^2 R_1{}^2 \frac{(R_2 - R_1)^3}{R_1 + R_2} \tag{1.9}$$

ergeben sich folgende Abhängigkeiten:

$$Re_{krit} = \sqrt{\frac{\pi^4 \left(R_1 + R_2\right)}{2 \left(R_2 - R_1\right) P}} \tag{1.10}$$

$$Ta_{krit} = \frac{\pi^4}{P} \tag{1.11}$$

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß Reynolds-(1.8) und Taylor-Zahl(1.9) auch abweichend definiert werden. Beispielsweise findet man unter anderem auch $Ta = 4Re^2 \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}$. In dieser Arbeit werden bei selbst erbrachten Ergebnissen die in Gleichung (1.8) und (1.9) notierten Definitionen wie bei DiPrima [DiPrima u. a. 1984] verwendet. In guter Näherung gilt für Taylor‘s Formulierung auch:

$$\text{für } R_1 \gg \left(R_2 - R_1\right): \; Re\sqrt{\Psi} = \frac{U_1 \left(R_2 - R_1\right)}{\nu} \sqrt{\frac{\left(R_2 - R_1\right)}{R_1}} \approx 41.1 \; . \tag{1.12}$$

Da der Begriff „*viel kleiner*“ dehnbar ist, soll die folgende Tabelle qualitative Aussagen über eine angemessene Verwendung vermitteln.

Ψ	η	Re_{krit} (1.7) (1.10)	Re_{krit} (1.12)	Fehler (1.12) zu (1.10) in %
0.1	$0.\overline{90}$	137.66	129.97	5.914
0.01	$0.\overline{9900}$	413.37	411.00	0.576
0.001	$0.\overline{999000}$	1300.50	1299.70	0.062 (Gleitlagerbereich)
0.0001	$0.\overline{99990000}$	4110.43	4110.00	0.010

In diesem Zusammenhang kann man nun auch auf den Gültigkeitsbereich der eigentlichen Taylor‘schen Beschreibung (Gleichung (1.7) und (1.10)) zurückzukommen. Hierzu wurde sie mit einem breitem Wertespektrum von Spaltweiten (bzw. Radienverhältnisse) von DiPrima [DiPrima u. a. 1984],[DiPrima und Swinney 1985] verglichen (Abbildung 1.11).

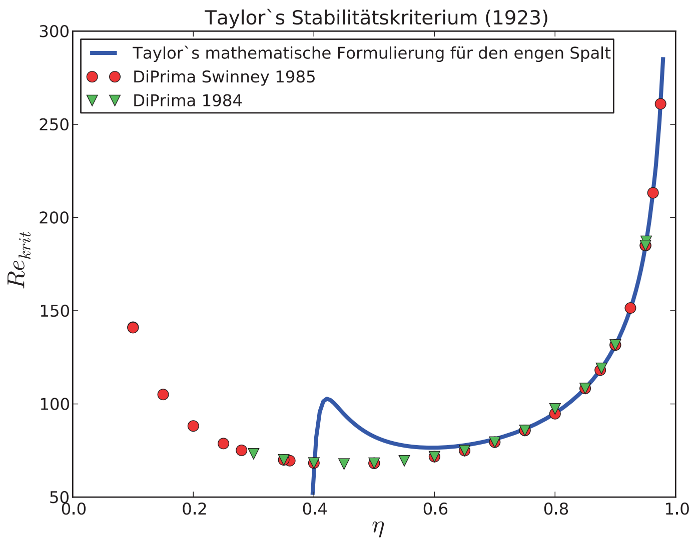

Abbildung 1.11: Taylor‘s Formulierung gilt nur für kleine Spalte. Etwa für $\eta > 0.75$, was einer normierten Spaltweite von $\Psi < 0.\bar{3}$ entspricht, ist keine Abweichung zu aktuellen Daten festzustellen.

1933 bestätigt Fritz Wendt in einer umfangreichen experimentellen Arbeit [Wendt 1933] unter anderem Taylor‘s Stabilitätsformulierung ((1.6),(1.7)).

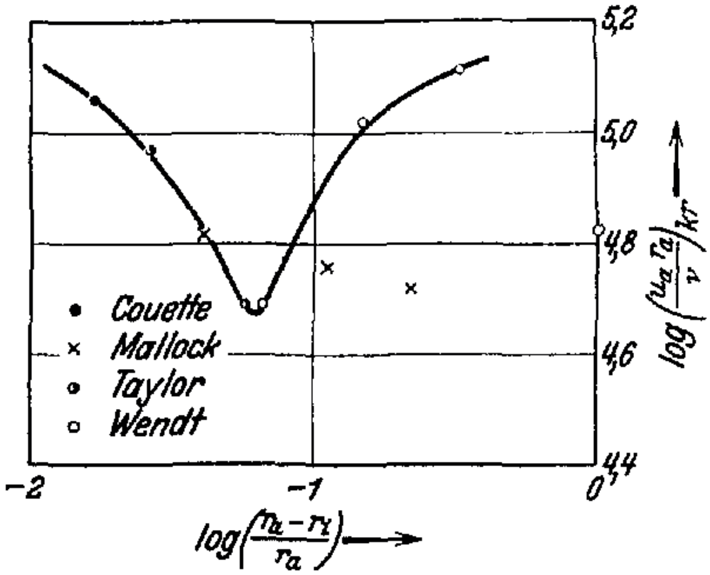

Abbildung 1.12: Wendt‘s Messungen zur Stabilitätsgrenze. Abbildung aus 1.12.

Im Gegensatz zu Abbildung 1.11 ist in Abbildung 1.12 eine logarithmische Darstellung auf Ordinaten- und Abszissenachse vorgenommen worden: $log\,(Re_{krit})\,(log(\psi))$. Des Weiteren benutzt er ein von Definition (1.8) abweichendes Längenmaß $L = R_2$ statt $L = R_2 - R_1$.