2 Grundlagen

Die physikalisch-mathematischen Grundlagen zur Beschreibung aller bzgl. der Materie makroskopischen elektrischen und magnetischen Phänomene bilden die Maxwellschen Gleichungen, so auch für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen. Sie können sowohl in integraler als auch, wie hier folgend, in differenzieller Weise notiert sein [He01], [Bl94], [Si73]:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \varepsilon \frac{\partial(\boldsymbol{E})}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial(\boldsymbol{H})}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{4}$$

In (1) und (2) wird die Verkopplung des elektrischen mit dem magnetischen Feld (im Folgenden werden auch die Abkürzungen E- und H-Feld benutzt) ausgedrückt, die bei allen zeitlich veränderlichen Feldern auftritt. Die Quellen der elektrischen und magnetischen Phänomene finden sich in den Gleichungen in Form der Stromdichte **J** und der Raumladungsdichte ρ wieder. Diese Quellterme sind nicht unabhängig voneinander, sondern werden durch die sogenannte Kontinuitätsgleichung (5) miteinander in Zusammenhang gebracht und stellen die Anregung des betrachteten Systems dar [He01], [Bl94], [Si73].

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{5}$$

Die Eigenschaften der Materie, in der sich die elektromagnetischen Phänomene abspielen, werden durch drei Materialgleichungen (6), (7) und (8) beschrieben, die das Verhältnis von Flussdichte und Feld angeben. Im linearen Fall wird der Quotient aus beiden für das elektrische Feld mit ε, für das magnetische Feld mit μ und für das Strömungsfeld mit κ benannt. Diese bestehen im Fall des elektrischen und magnetischen Feldes aus einer Naturkonstante (indiziert mit 0) und einer materialabhängigen Konstante [Bl94], [Kü05].

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \boldsymbol{E} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \boldsymbol{H} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{J} = \kappa \cdot \boldsymbol{E} \tag{8}$$

Die relative Permittivität ε_r und die relative Permeabilität μ_r sind im Allgemeinen frequenzabhängige Größen. Sie können auch in komplexer Schreibweise dargestellt werden, wobei dann der imaginäre Teil die ohmschen Verluste des Materials angibt [Hi66].
Nur bei isotroper Materie gibt es einen skalaren Zusammenhang zwischen Flussdichte und Feld. Ist dies nicht gegeben, so werden ε_r, μ_r und κ als Tensor, eine 3x3-Matrix, angegeben, um den Materialeinfluss in alle drei Raumrichtungen zu beschreiben [Si73], [Ka06].

2.1 Allgemeine Lösungen der Maxwellschen Gleichungen

Wie bereits erwähnt, sind das E- und das H-Feld im zeitveränderlichen Fall miteinander verkoppelt. Die mathematische Separation der dies beschreibenden Gleichungen ist durch Überführung in Differentialgleichungen zweiter Ordnung möglich. Die Lösung dieser Differentialgleichungen ist auf verschiedenen Wegen durchführbar, wobei eine Möglichkeit darin besteht, **E** und **H** von so genannten Potentialfunktionen abzuleiten [He01], [Si73]. Dabei wird gemäß (9) das H-Feld als Wirbel eines noch zu bestimmenden Vektorpotentials **A** angenommen.

$$\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{9}$$

Das Elektrische Feld fordert zusätzlich zu der zeitlichen Ableitung des Vektorpotentials **A** noch die örtliche Ableitung eines noch zu bestimmenden skalaren Feldes ϕ:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi - \mu \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\,. \tag{10}$$

Das Einsetzen dieser Ausdrücke in (1) und (2) führt zu den Differentialgleichungen zweiter Ordnung (11) und (12) für **A** und ϕ [Bl94], [Si73]. Dabei müssen spezielle Eichbedingungen definiert werden, die einen Freiheitsgrad der Gleichungen reduzieren. Sie sind bei Interesse in [He01], [Bl94] oder in anderer Standardliteratur zu diesem Thema nachzulesen.

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\boldsymbol{J} \tag{11}$$

$$\nabla^2 \Phi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{12}$$

Wie an dieser allgemeinen Schreibweise der Gleichungen zu erkennt ist, stellen die Quellenterme die Inhomogenitäten der Differentialgleichungen dar. Es sind die Stromdichte **J** und die Volumenladungsdichte ρ mit einem Vorfaktor. Sind diese Quellen im gesamten betrachteten Gebiet bekannt, lassen sich (11) und (12) über das Coulomb-Integral lösen [He01], [Bl94]:

$$A(\boldsymbol{r},\, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{V} \frac{\boldsymbol{J}(\tilde{\boldsymbol{r}},\, t - \frac{|\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}|}{c})}{|\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}|}\, d\tilde{V} \tag{13}$$

$$\Phi(\boldsymbol{r},\, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint\limits_{V} \frac{\rho(\tilde{\boldsymbol{r}},\, t - \frac{|\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}|}{c})}{|\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}|}\, d\tilde{V} \tag{14}$$

Das Integrationsvolumen V ist dabei das Gebiet, in dem **J** und ρ von Null verschieden sind. Die Integranden in (13) und (14) sind Funktionen bezüglich des Raumes und der Zeit, welche zusätzlich eine Retardierung erfahren, womit der Ausbreitung der Felder mit endlicher Geschwindigkeit c (Lichtgeschwindigkeit im Medium) Sorge getragen wird. Der Nenner der Intergranden ist der Abstand zwischen Aufpunkt und Quellpunkt. Gleichung (13) und (14) sind die allgemeinen Lösungsformen, die von einer beliebigen Quellverteilung im Freiraum ausgehen. In speziellen Fällen werden Integrand und Integrationsgebiet an das gegebene Problem angepasst. Somit können die Integrale durch Vorgaben, wie z.B. der Beschränkung auf dünne metallische Leiter o. Ä. vereinfacht werden [Br85]. Die Lösungen für **A** und ϕ bestehen im Allgemeinen aus den partikulären Lösungen (13) und (14) und homogenen Lösungen, die über mathematische Standardlösungswege gefunden werden können [Bl94]. Sind die Potentiale **A** und ϕ gefunden, so lassen sich daraus E- und H-Feld über (9) und (10) berechnen.

2.2 Lösungen der Maxwellschen Gleichungen für spezielle Geometrien

Die Berechnung von E- und H-Feld über den zuvor beschriebenen Lösungsweg findet meist nur in numerischer Software Anwendung, da dort die numerische Auswertung nahezu beliebig komplexe Quellverteilungen zulässt. Eine rein analytische Betrachtung ist meist schwierig oder sogar unmöglich [Br85]. Es gibt jedoch einige Problemstellungen mit Randbedingungen, die sowohl eine analytische Betrachtung unter bestimmten Vereinfachungen erlauben, als auch einen bedeutenden praktischen Wert besitzen. Die beiden wichtigsten Geometrien, die in dieser Arbeit eine Anwendung finden, sind dabei der transversalelektromagnetische Wellenleiter und die elektrisch kurze Stabantenne.

2.2.1 Leitungswellenleiter - Modenausbreitung als Lösung der Maxwellschen Gleichungen

Der technisch bedeutendste Wellenleiter für den unteren Frequenzbereich ist der transversalelektromagnetische (TEM-) Wellenleiter, besonders der Koaxialleiter [Un91], [Zi95]. Der ideale Zweidrahtwellenleiter besteht, wie in [Kü05] definiert, aus zwei unendlich langen parallelen räumlich getrennten ideal leitenden Leitungen mit konstantem Querschnitt. Zusätzlich wird gefordert, dass ihr Abstand voneinander wesentlich kleiner als die geführte Wellenlänge ist, um dafür Sorge zu tragen, dass nur TEM-Wellen transportiert und alle anderen Wellentypen (Moden) ausreichend gedämpft werden [Un91]. Dieses theoretische Modell, welches zusätzlich streng genommen nur für unendlich lange Leitungen gilt, wird als Lecherleitung bezeichnet [Zi95]. Das Ersatzschaltbild für ein infinitesimales Stück dz besteht nur aus zwei konzentrierten Bauelementen: einer Längsinduktivität L'dz und einer Parallelkapazität C'dz [Un91]. Die gestrichenen Größen weisen darauf hin, dass es sich um Größen pro Längeneinheit handelt. Für Betrachtungen realer Zweidrahtleitung wird das Modell um die Elemente R'dz und G'dz erweitert, welche in Abbildung 1 die Leitungs- und dielektrischen Verluste darstellen [Un91]. Sind Leitungsverluste vorhanden, wird genau genommen von einer Quasi-TEM-Wellenausbreitung gesprochen: Das E-Feld erfährt dann zusätzlich eine Feldkomponente in Ausbreitungsrichtung, diese muss jedoch klein gegenüber der transversalen Feldkomponente sein [Kü05]. Im Verlauf dieser Arbeit wird jedoch der Einfachheit halber nur der Begriff „TEM-…“ verwendet werden.

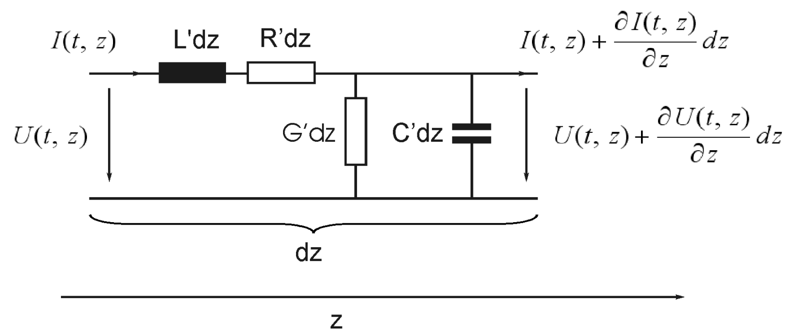

Abbildung 1: Ersatzschaltbild eines infinitesimal kleinen Leitungstückes dz eines realen TEM-Wellenleiters, [Un91]

Die Wellenausbreitungsvorgänge auf der Zweidrahtleitung gehorchen zwar den Maxwellschen Gleichungen, jedoch wird die mathematische Herleitung aus dem Ersatzschaltbild gewonnen und führt auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung für Strom und Spannung, wie für U beispielhaft in (15) gezeigt [Un91].

$$\frac{\partial^2 U(t, z)}{\partial z^2} = \gamma^2 \cdot U(t, z) \qquad (15)$$

Der Faktor γ wird dabei als Ausbreitungskonstante bezeichnet und besteht wie in (16) aus Real- und Imaginärteil. Dabei ist α die Wellendämpfung, welche bei verlustlosen Leitungen verschwindet und β die Phasenkonstante, die die Phasenänderung bei fortlaufender Welle entlang der Leitung beschreibt [Un91]. Die Kreisfrequenz ist mit ω gegeben.

$$\gamma = ((R' + j\omega L') \cdot (G' + j\omega C'))^{\frac{1}{2}} = \alpha + j\beta \qquad (16)$$

Die Lösungen der Differentialgleichungen für U und I lauten [Un91]:

$$U(t, z) = U_h(t, z) + U_r(t, z) = U_1 \cdot e^{-\gamma z + j\omega t} + U_2 \cdot e^{\gamma z + j\omega t} \qquad (17)$$

und

$$I(t, z) = \frac{1}{Z} U_h(t, z) - \frac{1}{Z} U_r(t, z) \tag{18}$$

Sie sind Überlagerungen aus einer hinlaufenden Welle (indiziert mit h) und einer rücklaufenden Welle (indiziert mit r). Der Quotient von U und I der hinlaufenden oder der negativen rücklaufenden Welle wird als Leitungswellenwiderstand Z bezeichnet, der, wie auch die Ausbreitungskonstante, eine in (19) gegebene Funktion der primären Leitungsparameter L', R', G' und C' darstellt [Un91]. Die Verkopplung von hin- und rücklaufender Welle wird über den Reflexionsfaktor r_L in (20) ausgedrückt, wobei Z_e der Abschlusswiderstand der Leitung ist [Un91]. Ist dieser identisch dem Wellenwiderstand, verschwindet die rücklaufende Welle und es wird von Anpassung gesprochen.

$$Z = \left(\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

$$r_L = \frac{Z_e - Z}{Z_e + Z} = \frac{U_h}{U_r} = -\frac{I_h}{I_r} \tag{20}$$

$$S_{11_{\mathrm{dB}}} = 20 \cdot \log(r_L) \tag{21}$$

In der Praxis wird die Reflexion oft über den S_{11}-Parameter der Streumatrix wie in (21) in logarithmischer Form angegeben [Sc84].
Das Stehwellenverhältnis s in (22) ist der Quotient der maximalen zur minimalen Spannungsamplitude auf der Leitung [Un91]. Das dies nur für verlustlose Leitungen gilt, verdeutlicht Abbildung 2.
Es gilt auch näherungsweise für sehr kurze Leitungsstücke, wenn davon ausgegangen wird, dass α klein ist.

$$s = \frac{|U_h| + |U_r|}{|U_h| - |U_r|} \overset{\text{verlustlose Leitung}}{=} \frac{U_{\max}}{U_{\min}} \tag{22}$$

Es ist auch möglich, das Stehwellenverhältnis aus dem Reflexionsfaktor auszudrücken und umgekehrt.
Der Koaxialleiter, eine Besonderheit der Zweidrahtleitungen, erzeugt beim Leistungstransport ein E-Feld, welches radial vom Innen- zum Außenleiter zeigt und ein H-Feld, das konzentrische Kreise zwischen diesen beiden mit dem Innenleiter im Mittelpunkt bildet [Zi95]. Durch seine spezielle Leiteranordnung und im Idealfall symmetrische Stromführung gibt es kein Feld außerhalb des Doppelleiters.