Kapitel 1

Einleitung

Für viele Probleme und Anwendungen im Gebiet der partiellen Differentialgleichungen ist ein Lebesgue-Raum $\mathbf{L}_1(\Omega, \mathrm{d}\mu)$ die natürliche Bühne; als Beispiele seien Erhaltungsgleichungen[1], Populationsgleichungen[2] sowie die (inhomogene) Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = f,$$

bei der eine Lösung

$$u : [0, \infty) \times \Omega \to [0, \infty), \qquad (t, x) \mapsto u(t, x),$$

eine von der Zeit t abhängige Wärmedichte $u(t, \cdot)$ und die Norm $\|u(t, \cdot)\|_{\mathbf{L}_1}$ die Wärmemenge beschreibt, angeführt. Andererseits verhalten sich jedoch Hilberträume in mancher Hinsicht besser als andere Banachräume; insbesondere entwickelt hier die Spektraltheorie – vornehmlich durch den Spektralsatz – ihre volle Kraft. Es ist daher oftmals von Vorteil, einen „Szenenwechsel“ vom Banachraum $\mathbf{L}_1$ in den Hilbertraum $\mathbf{L}_2$ vorzunehmen.

Im Umfeld der Wärmeleitungsgleichung haben M. van den Berg und E.B. Davies in [vdBD89] den Zusammenhang zwischen dem *Wärmeinhalt* Q_Ω und der *Wärmespur* Z_Ω, die wir sogleich definieren, einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^\nu$ untersucht. Es bezeichne H_Ω den Laplace-Operator mit (homogenen) Dirichletschen Randbedingungen im Hilbertraum $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Dann besitzt die Halbgruppe $(\mathrm{e}^{-H_\Omega t})_{t \geq 0}$ einen Integralkern

$$0 \leq p_\Omega \in \mathbf{C}^\infty\Big(\Omega \times \Omega \times (0, \infty)\Big),$$

den *Wärmeleitungskern*. Wir nennen

$$Z_\Omega(t) := \operatorname{spur} \mathrm{e}^{-H_\Omega t} = \int_\Omega p_\Omega(x, x, t) \, \mathrm{d}\mathcal{V}_x \in [0, \infty]$$

[1] Vergleiche beispielsweise [Lax73].

[2] Vergleiche etwa Abschnitt VI.1 in [EN00].

die *Wärmespur* und

$$Q_\Omega(t) := \int_{\Omega\times\Omega} p_\Omega(x,y,t)\,\mathrm{d}\mathcal{V}_{(x,y)} \in [0,\infty]$$

den *Wärmeinhalt* von Ω zur Zeit $t > 0$. In der Arbeit [vdBD89] vermuten M. van den Berg und E.B. Davies, dass für $t \in [0,\infty)$ genau dann $Q_\Omega(s) < \infty$ für alle $s > t$ gilt, wenn $Z_\Omega(s) < \infty$ für alle $s > t$ ist. Im Fall, wo H_Ω kompakte Resolvente hat,[3] lässt sich dieses Problem auf die Aufgabe, die $\mathbf{L}_1$-Norm von Eigenfunktionen von H_Ω durch ihre $\mathbf{L}_2$-Norm abzuschätzen, zurückführen. In [vdBHV15] ist dies M. van den Berg, R. Hempel und J. Voigt gelungen; tatsächlich erhalten sie nicht nur eine positive Antwort auf die Vermutung aus [vdBD89], sondern sogar eine konkrete Abschätzung von Q_Ω durch Z_Ω;[4] eine Abschätzung von Z_Ω durch Q_Ω ist schon länger bekannt.[5] Die Bedeutung der $\mathbf{L}_1$-Abschätzungen ist aus den Gleichungen

$$Q_\Omega(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-t\lambda_k} \left(\int_\Omega \Phi_k\,\mathrm{d}\mathcal{V}\right)^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-t\lambda_k}\,\|\Phi_k\|^2_{\mathbf{L}_1(\Omega)}$$

und

$$Z_\Omega(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-t\lambda_k}$$

zu erkennen; dabei ist $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis bestehend aus reellen Eigenfunktionen von H_Ω zugehörig zur monoton steigenden Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von (nicht-negativen) Eigenwerten von H_Ω.[6] Das Problem, einen Zusammenhang zwischen Wärmeinhalt und -spur zu finden, wird hier also durch einen Transfer vom Banachraum $\mathbf{L}_1(\Omega)$ in den Hilbertraum $\mathbf{L}_2(\Omega)$ gelöst. Wir bemerken, dass im Fall $\mathcal{V}(\Omega) < \infty$ die Schwarzsche Ungleichung die $\mathbf{L}_1$-Abschätzung

$$\|u\|_{\mathbf{L}_1(\Omega)} \le \sqrt{\mathcal{V}(\Omega)} \cdot \|u\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\,, \qquad u \in \mathbf{L}_2(\Omega),$$

liefert. Dies ist jedoch in zweierlei Hinsicht unbefriedigend. Erstens können Wärmeinhalt und -spur auch bei unendlichem Volumen endlich ausfallen; vergleiche hierzu etwa die *hornförmigen*[7] Bereiche, die beispielsweise in Abschnitt 5 von [vdBD89] betrachtet werden. Zweitens ist der Faktor $\mathcal{V}(\Omega)^{1/2}$,

[3] Der Operator H_Ω kann auch dann kompakte Resolvente haben, wenn das Volumen von Ω unendlich ist. Vergleiche hierzu Beispiel 1.8 in [vdBHV15].

[4] Vergleiche Theorem 5.1 in [vdBHV15].

[5] Vergleiche z. B. Lemma 2.6 in [vdBD89].

[6] Vergleiche Gleichung (5.2) in [vdBHV15].

[7] Zusammenhängende Teilmengen des $\mathbb{R}^\nu$ der Form

$$F = \bigcup_{x\in[0,\infty)} \{x\} \times F(x), \qquad F(x) \subset \mathbb{R}^{\nu-1},$$

selbst wenn Ω endliches Volumen hat, oftmals zu grob, etwa wenn die betrachteten Funktionen „im Wesentlichen“ in einem kleineren Teilbereich von Ω lokalisiert sind. In [vdBHV15] gelingt den Autoren erstmals eine Abschätzung

$$\|\Phi\|_{\mathbf{L}_1(\Omega)} \leq c\,\|\Phi\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \tag{A}$$

der $\mathbf{L}_1$-Norm von Eigenfunktionen Φ von H_Ω, die zu einem Eigenwert unterhalb des wesentlichen Spektrums von H_Ω gehören, bei der die Konstante c durch spektrale Eigenschaften des Operators H_Ω bestimmt ist – genauer ist c eine Funktion, die von dem Eigenwert λ, dem Spektrum $\sigma(H_\Omega)$ und der Dimension ν abhängt.[8] Wir bemerken, dass lediglich bei der Anwendung auf Wärmeinhalt und -spur, nicht jedoch bei der $\mathbf{L}_1$-Abschätzung von Eigenfunktionen, die Kompaktheit der Resolvente vorausgesetzt wird. Weiterhin sei bemerkt, dass die $\mathbf{L}_1$-Abschätzung das wohlbekannte Resultat

$$\|\Phi\|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega)} \leq C\lambda^{\nu/4}\,\|\Phi\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\,, \tag{B}$$

wobei $H_\Omega\Phi = \lambda\Phi$ und C eine allein von der Dimension ν abhängige Konstante ist, komplementiert. Durch Gleichung (B) lässt sich durch Interpolation tatsächlich $\|\Phi\|_{\mathbf{L}_p(\Omega)}$ für beliebiges $p \in [2,\infty]$ kontrollieren;[9] außerdem erhält man mit (B) und der Abschätzung $\|\Phi\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leq \|\Phi\|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega)} \cdot \|\Phi\|_{\mathbf{L}_1(\Omega)}$ eine untere Schranke für die $\mathbf{L}_1$-Norm, nämlich

$$\|\Phi\|_{\mathbf{L}_1(\Omega)} \geq C^{-1}\lambda^{-\nu/4}\,\|\Phi\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}\,.$$

Mit den Abschätzungen (A) und (B) erhalten wir daher insgesamt erstens sowohl eine obere als auch eine untere Abschätzung von $\|\Phi\|_{\mathbf{L}_1(\Omega)}$ durch $\|\Phi\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}$ und zweitens Kontrolle über die $\mathbf{L}_p$-Norm von Φ für alle $p \in [1,\infty]$.

In [Vog15] ist es H. Vogt, auf der Arbeit [vdBHV15] aufbauend, gelungen, eine schärfere $\mathbf{L}_1$-Abschätzung zu gewinnen. Dabei betrachtet er allgemeiner einen selbstadjungierten Operator H, der Erzeuger einer positiven stetigen Halbgruppe ist, die durch die freie Wärmehalbgruppe $(\mathrm{e}^{-tH_{\mathbb{R}^\nu}})_{t\geq 0}$ dominiert wird. Die Abschätzung gilt weiterhin nur für Eigenfunktionen zu Eigenwerten unterhalb des wesentlichen Spektrums. Obschon in [Vog15] Ergebnisse aus der Theorie der Operatorhalbgruppen zum Einsatz kommen, gibt es auch methodische Gemeinsamkeiten mit [vdBHV15]. In beiden Arbeiten besteht

wobei $F(x) \subset F(x')$ für $x \geq x'$ gelte und das Integral $\int_0^\delta \mathcal{A}\big(F(x)\big)\,\mathrm{d}x$ über die $(\nu-1)$-dimensionalen Volumina $\mathcal{A}\big(F(x)\big)$ der $F(x)$ für alle $\delta > 0$ endlich ausfalle.

[8]Wir sprechen im weiteren Verlauf etwas lax von einer Konstanten c, obschon stets eine Funktion in diesem Sinne gemeint ist.

[9]Vergleiche beispielsweise Theorem 5.2.5 in [Sim15b].

eine zentrale Idee im exponentiellen Abklingen der Resolvente[10] $(H_\Omega - \varrho)^{-1}$ in dem Sinn, dass

$$\left\| \mathbb{1}_A (H_\Omega - \varrho)^{-1} \mathbb{1}_B \right\|_{X \to X} \leq \beta \mathrm{e}^{-\alpha \operatorname{dist}(A,B)}$$

gilt für (gewisse) messbare Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^\nu$ mit positivem Abstand. Während M. van den Berg, R. Hempel und J. Voigt hierbei mit $X = \mathbf{L}_2(\Omega)$ arbeiten, verwendet H. Vogt $X = \mathbf{L}_1(\Omega)$ und geht somit gewissermaßen zu einem späteren Zeitpunkt in den $\mathbf{L}_2$ über. Die Methode, die Resolvente als Abbildung von $\mathbf{L}_1$ nach $\mathbf{L}_1$ zu betrachten, stellt sich als vorteilhaft heraus und wird zum Teil auch in der vorliegenden Arbeit benutzt.

In dieser Arbeit erzielen wir gegenüber dem bisherigen Stand der Forschung in zweierlei Hinsicht Fortschritte:

Erstens zeigen wir, dass sich eine Abschätzung der Form

$$\|\Phi\|_{\mathbf{L}_1(\Omega)} \leq c \, \|\Phi\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \, ,$$

wobei die Konstante c lediglich durch spektrale Eigenschaften von H_Ω bestimmt ist, auch für Eigenfunktionen von H_Ω gewinnen lässt, die Eigenwerten in einer Lücke im wesentlichen Spektrum von H_Ω zugehörig sind. Grundlegend hierfür ist die Idee, nicht nur das exponentielle Abklingen der Resolvente

$$A := (H_\Omega - \varrho)^{-1},$$

sondern auch von $(\chi A \chi - \eta)^{-1}$ zu verwenden, wobei χ die Multiplikation mit einer geeigneten charakteristischen Funktion ist.

Zweitens beweisen wir eine entsprechende Abschätzung auch für Schrödingeroperatoren $S_\Omega = H_\Omega + V$ mit Potential V aus der Kato-Klasse und Eigenfunktionen zu Eigenwerten unterhalb des wesentlichen Spektrums von S_Ω. Es sei bemerkt, dass das Potential V unbeschränkten Negativteil haben kann und somit die Operatorhalbgruppe $(\mathrm{e}^{-tS_\Omega})_{t \geq 0}$ im Allgemeinen *nicht* von der freien Wärmehalbgruppe dominiert wird.

Als Vorstufe zu diesen beiden Fortschritten beweisen wir in dieser Arbeit außerdem erneut eine $\mathbf{L}_1$-Abschätzung für Eigenfunktionen von H_Ω zu Eigenwerten unterhalb des wesentlichen Spektrums. Die von uns gewonnene Abschätzung ist zwar besser als diejenige in [vdBHV15], kann jedoch nicht mit der im Wesentlichen optimalen Abschätzung aus [Vog15] konkurrieren. Unser Beweis kommt allerdings ohne die Majorisierung der Operatorhalbgruppe durch die freie Wärmehalbgruppe aus und lässt daher eine Verallgemeinerung beispielsweise (aber nicht ausschließlich) auf Schrödingeroperatoren zu.

[10] Genauer wird, auch in der vorliegenden Arbeit, die Resolvente $(H_\Sigma - \lambda)^{-1}$ verwendet, wobei λ ein Eigenwert von H_Ω und $\Sigma \subset \Omega$ eine Teilmenge ist, für die $\lambda \notin \sigma(H_\Sigma)$ gilt.

Gliederung

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut.

Kapitel 2 – Präliminarien. Wir umreißen einige Definitionen und Resultate der Funktionalanalysis, die für die vorliegende Arbeit zentral sind. Im ersten Abschnitt werden die für unsere Zwecke relevanten Funktionenräume eingeführt; insbesondere finden sich hier eine Definition der Sobolevräume und einige Hilfssätze über schwache Ableitungen. Der zweite Abschnitt behandelt (lineare, nicht notwendigerweise beschränkte) Operatoren in Banach- und spezieller in Hilberträumen. Wir definieren das Spektrum abgeschlossener Operatoren sowie den Adjungierten eines dicht definierten Operators im Hilbertraum. Weiter diskutieren wir den Zusammenhang zwischen Operatoren und quadratischen Formen und zitieren den Spektralsatz, das Min-Max-Prinzip, einen Satz über die Stabilität beschränkter Invertierbarkeit sowie den Satz von Dunford und Pettis über die Existenz von Integralkernen. Ferner betrachten wir in Form des Dirichlet-Laplace-Operators und der von Funktionen aus der (lokalen) Kato-Klasse erzeugten (maximalen) Multiplikationsoperatoren zwei Beispiele linearer Operatoren, die für diese Arbeit von großer Bedeutung sind. Im dritten Abschnitt wenden wir uns der Fourier-Transformation zu, kraft derer der Laplace-Operator in $\mathbb{R}^\nu$ zu einem Multiplikationsoperator unitär äquivalent ist.

Kapitel 3 – IMS-Lokalisierungsformeln. Wir beschäftigen uns mit der Frage, inwiefern gewisse Operatoren im Hilbertraum $\mathbf{L}_2(\Omega)$ in dem Sinne *lokalisiert* werden können, dass sie sich bis auf einen *kontrollierbaren* Fehler in Operatoren zerlegen lassen, die auf Teilräumen $\mathbf{L}_2(\Omega_m)$ mit $\Omega_m \subset \Omega$ wirken. Kontrollierbar heißt in diesem Kontext, dass der Fehler bei geeigneter Wahl der Teilräume kleiner als eine vorgegebene Toleranz ist. Zu diesem Zweck konstruieren wir im ersten Abschnitt eine IMS-Zerlegung $(\zeta_m)_{m\in M}$ der Eins[11] und setzen diese im zweiten Abschnitt ein, um den Dirichlet-Laplace-Operator H unter Zuhilfenahme des Doppelkommutators $\big[\zeta_m, [\zeta_m, H]\big]$ mit den Funktionen ζ_m der IMS-Zerlegung in lokalisierte Anteile $\zeta_m H \zeta_m$ und einen (beschränkten) Lokalisierungsfehler zu zerlegen; diese Zerlegung kommt in der IMS-Lokalisierungsformel (Theorem 3.2.7) zum Ausdruck. Unsere Darstellung ist eng an die in [CFKS87] angelehnt, ergänzt sie jedoch um Konvergenzargumente. Im dritten Abschnitt übertragen wir die Lokalisierungsformel auf einen Resolventenoperator $(H-\lambda)^{-1}$; der Doppelkommutator hat hierbei eine (algebraisch) weniger einfache Gestalt, sodass in den Konvergenzargumenten einige Anpassungen erforderlich sind. Im vierten Abschnitt übertragen

[11]Eine Zerlegung der Eins, bei der jedoch $\sum \zeta_m^2 = 1$ statt $\sum \zeta_m = 1$ gilt; vergleiche Definition 3.1.1.

wir die IMS-Lokalisierungsformel auf Schrödinger-Operatoren. Dieser Schritt erfordert keine wesentlichen Modifikationen, da der vom Potential erzeugte Multiplikationsoperator mit den Funktionen der IMS-Zerlegung kommutiert.

Kapitel 4 – $\mathbf{L}_1$-Abschätzungen. Wir kommen zum eigentlichen Anliegen dieser Arbeit. Im ersten Abschnitt behandeln wir den Fall, dass Φ eine Eigenfunktion des Dirichlet-Laplace-Operators zu einem Eigenwert λ unterhalb des wesentlichen Spektrums ist. Mit Hilfe der IMS-Lokalisierungsformel gehen wir – wie in [vdBHV15] – zu einem Teilbereich $\Sigma \subset \Omega$ über, sodass λ unterhalb des Infimums des *gesamten* Spektrums von H_Σ liegt. Anschließend zeigen wir unter Verwendung des Satzes von Dunford und Pettis, dass der Resolventen-Operator $(H_\Sigma - \lambda)^{-1}$ einen exponentiell abklingenden Integralkern besitzt; wir führen dabei $(H_\Sigma - \lambda)^{-1}$ mittels der ersten Resolventengleichung auf Potenzen von $(H_\Sigma + 1)^{-1}$ zurück und studieren letztere unter Zuhilfenahme der Fourier-Transformation. Dass der Integalkern der Resolvente $(H_\Sigma - \lambda)^{-1}$ exponentiell abklingt, erlaubt es uns, sie als stetigen Operator von $\mathbf{L}_1(\Sigma)$ nach $\mathbf{L}_1(\Sigma)$ aufzufassen. Wir zerlegen die Eigenfunktion Φ von H_Ω mit Hilfe einer Abschneidefunktion ξ, die auf $\Omega \setminus \Sigma$ mit $\mathbb{1}_{\Omega\setminus\Sigma}$ übereinstimmt, und schätzen die $\mathbf{L}_1$-Norm von $\xi\Phi$ mittels der Schwarzschen Ungleichung ab. Eine Abschätzung des verbliebenen Anteils $(1-\xi)\Phi$ gelingt wegen der Identität

$$(1-\xi)\Phi = (H_\Sigma - \lambda)^{-1}[\xi, H_\Omega]\Phi \tag{C}$$

durch die Stetigkeit von $(H_\Sigma - \lambda)^{-1}$ als Operator von $\mathbf{L}_1$ nach $\mathbf{L}_1$. Wir erhalten hierdurch in Theorem 4.1.14 und Korollar 4.1.15 die angestrebte Abschätzung der Form $\|\Phi\|_{\mathbf{L}_1(\Omega)} \le c\,\|\Phi\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}$ mit einer Konstanten c, die durch spektrale Eigenschaften von H_Ω bestimmt ist.

Der Fall, dass Φ eine Eigenfunktion des Dirichlet-Laplace-Operators zu einem Eigenwert λ in einer Lücke im wesentlichen Spektrum ist, wird in Abschnitt 4.2 behandelt. Wir betrachten den Resolventen-Operator

$$A := (H_\Omega - \varrho_0)^{-1}$$

für einen Referenzwert $\varrho_0 \in \mathbb{R}\setminus\sigma(H_\Omega)$, der so gewählt ist, dass der Eigenwert $\eta := (\lambda - \varrho_0)^{-1}$ von A gerade das Maximum des Spektrums von A ist. Ähnlich wie im ersten Abschnitt konstruieren wir einen Teilbereich $\Xi \subset \Omega$ derart, dass η für $\chi := \mathbb{1}_\Xi$ oberhalb des Spektrums von $\chi A \chi$ liegt. Wir zeigen, dass die Resolvente $(\chi A \chi - \eta)^{-1}$ exponentiell abklingt im Sinne von

$$\left\| \mathbb{1}_{Q_k} (\chi A \chi - \eta)^{-1} \mathbb{1}_{Q_\ell} \right\|_{\mathbf{L}_2 \to \mathbf{L}_2} \le \beta \mathrm{e}^{-\alpha|k-\ell|},$$

wobei $Q_k := k + (-1/2, 1/2]^\nu$ für $k \in \mathbb{Z}^\nu$ ein achsenparalleler Würfel in $\mathbb{R}^\nu$ ist. Wir verwenden erneut eine Zerlegung $\Phi = \xi\Phi + (1-\xi)\Phi$ mit einer

Abschneidefunktion ξ, die auf $\Omega \setminus \Xi$ mit $\mathbb{1}_{\Omega \setminus \Xi}$ übereinstimmt. Für die $\mathbf{L}_1$-Abschätzung des Anteils $(1-\xi)\Phi$ verwenden wir die Identität

$$(1-\xi)\Phi = (\chi A \chi - \eta)^{-1} \chi A [H_\Omega, \xi] A \Phi \tag{D}$$

und das exponentielle Abklingen sowohl von $(\chi A \chi - \eta)^{-1}$ als auch von A. Da sich $\|\xi\Phi\|_{\mathbf{L}_1(\Omega)}$ mit der Schwarzschen Ungleichung abschätzen lässt, erhalten wir in Theorem 4.2.10 die erhoffte $\mathbf{L}_1$-Abschätzung.

Im dritten Abschnitt übertragen wir schließlich unser Vorgehen aus dem ersten Abschnitt vom Dirichlet-Laplace-Operator auf Dirichlet-Schrödinger-Operatoren mit Potentialen aus der Kato-Klasse. Das größte Hindernis hierbei besteht darin, dass sich die benötigten Informationen über den Integralkern der Resolvente nicht wie im Fall $V = 0$ aus der Fourier-Transformation gewinnen lassen; wir verwenden stattdessen die Theoreme B.7.1 und B.7.2 aus [Sim82]. Ansonsten entspricht unser Vorgehen dem im ersten Abschnitt; wir erhalten in Theorem 4.3.8 die angestrebte $\mathbf{L}_1$-Abschätzung für Eigenfunktionen von Schrödingeroperatoren zu Eigenwerten unterhalb des wesentlichen Spektrums.

Ausblick

Bei der Behandlung von Eigenfunktionen zu Eigenwerten in einer Lücke im wesentlichen Spektrum des Laplace-Operators H_Ω in Abschnitt 4.4.2 ist die Beobachtung zentral, dass sich der Kommutator der Resolvente A mit einer geeigneten Funktion φ vermöge der Gleichung

$$[A, \varphi] = A[\varphi, H_\Omega]A$$

auf den Kommutator $[\varphi, H_\Omega]$ zurückführen lässt; vergleiche hierzu den Beweis von Lemma 4.2.4. In diese Beobachtung fließen allerdings keine besonderen Eigenschaften des Operators H_Ω, sondern lediglich die Gleichungen

$$AH_\Omega = (1 + \varrho_0 A)\restriction_{\mathrm{Dom}\, H_\Omega}, \qquad H_\Omega A = 1 + \varrho_0 A,$$

ein. Es ist daher davon auszugehen, dass unser Vorgehen in ähnlicher Weise auch bei Schrödinger-Operatoren zu einer $\mathbf{L}_1$-Abschätzung führt.

Des Weiteren ist anzunehmen, dass eine Verallgemeinerung auf elliptische Differentialoperatoren der Form

$$Lf = -\sum_{i,j=1}^{\nu} \partial_i a_{ij} \partial_j f + Vf$$